『経済研究』(明治学院大学)第 164 号　2022 年

特定の次数列を満たすランダムグラフの大きさについてⅢ

浜　口　幸　弘

1. はじめに

本稿は以前の論文(浜口(2020, 2021))の続きに相当するものである.本稿では,特定の次数列,すなわち次数 1 と次数 k の頂点から構成されるランダムグラフに対して,孤立木の存在可能性に関する定理 1,k-正則部分グラフの存在可能性について評価した定理 2,およびグラフの直径を評価する定理 3 を導出した.

2. 概念と用語の定義

まず最初に,本稿に関係する概念と用語の定義を概括する.おおむね,浜口(2020, 2021)における定義と概念の記号化を踏襲するので,ここでは,必要最小限の定義と概念を述べるものとする.

まず浜口(2021)と同様,頂点数 n のランダムなグラフ G が,$d_1(n)$ 個の次数 1 の頂点および $d_k(n)$ 個の次数 k の頂点から構成される場合について考察を行う.以下では,この条件を満たす単純グラフを G_D として,簡単のために $n_1=d_1(n)$ および $n_k=d_k(n)$ と記す.また次数 k は,$4\leq k\leq n^{\frac{1}{8}}$を満たす n の関数とする.そして,$2m$ をコンフィギュレーションにおける頂点の総コピー数(次数の総和)とし,基準値 α を以下のように定義する.

$\alpha=\sum_{i=1}^{n-1} i(i-2)\frac{d_i(n)}{n}=-\frac{d_1(n)}{n}+\frac{k(k-2)d_k(n)}{n}$として,$\lim_{n\to\infty}\alpha$ は,$0<\lim_{n\to\infty}\alpha<1/2$を満たすように収束する(なお以下では,十分大きな n を前提にするので,$0<\alpha<1/2$ と考える).このとき,$n_1+n_k=n$ かつ $2m=n_1+kn_k$ なので,以下を得る.

$$n_1=\frac{k(k-2)-\alpha}{(k-1)^2}n,\ \ n_k=\frac{\alpha+1}{(k-1)^2}n,\ \ 2m=\frac{k+\alpha}{k-1}n.$$

また，$n < 2m \leq \dfrac{3n}{2}$である．

以下では，一定の条件下（本稿で対象にするグラフは，この条件を満たす．浜口（2020）参照）において，単純グラフの性質は多重グラフの性質から導ける事実（例えば，浜口（2020）参照）を利用する．

3. 次数 1 と次数 k の頂点からなるランダムグラフの性質

まず，G_D に含まれる孤立木の存在に関する定理を提示する．そのために補題 1 を与えるが，これは，浜口（2021）で示した補題の条件部分の誤りを修正したものである．なお，補題をこのように修正しても，浜口（2021）における定理の証明には何ら影響を及ぼさない．

補題 1

$0 < \varepsilon < 1$ とし，$\sigma = \sigma(n) > 0$ は，$\sigma \to \infty$ とする．そして整数 a は，$\sigma \leq a \leq \dfrac{\varepsilon m}{k}$を満たすとする．このとき，十分大きな n に対して，以下の不等式が成り立つ．

$$\frac{1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2a+1)} \leq \left(\frac{1}{2m}\right)^a \exp\left\{\frac{a^2}{2m}\left(1+O\left(\frac{a}{m}+\frac{1}{a}\right)\right)\right\}.$$

証明

$y = -\log(1-x)\,(x<1)$ のグラフは単調に増加するので，以下の不等式が成り立つ．

$$\left(-\sum_{t=1}^{a}\log\left(1-\frac{2t-1}{2m}\right)\right)\frac{1}{m} \leq \int_{1/2m}^{(2a+1)/2m}(-\log(1-x))\,dx.$$

ここで，$|x| < 1$ に対して，以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int(-\log(1-x))\,dx &= (1-x)\log(1-x)+x\\ &= (1-x)\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)+x\\ &= \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\cdots.\end{aligned}$$

この式を利用すれば，

$$\begin{aligned}&\int_{1/2m}^{(2a+1)/2m}(-\log(1-x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2a+1}{2m}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{2a+1}{2m}\right)^3+\cdots-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2m}\right)^3+\cdots\right).\end{aligned}$$

すなわち，以下を得る．

$$-\sum_{t=1}^{a}\log\left(1-\frac{2t-1}{2m}\right) \leq \frac{a^2}{2m}\left(1+O\left(\frac{a}{m}+\frac{1}{a}\right)\right).$$

ところで，以下の式が成り立つ．

$$\frac{1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2a+1)} = \left(\frac{1}{2m}\right)^a \left(\left(1-\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{3}{2m}\right)\cdots\left(1-\frac{2a-1}{2m}\right)\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{2m}\right)^a e^{\log\left(\left(1-\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{3}{2m}\right)\cdots\left(1-\frac{2a-1}{2m}\right)\right)^{-1}}$$
$$= \left(\frac{1}{2m}\right)^a e^{\left(-\sum_{t=1}^{a}\log\left(1-\frac{2t-1}{2m}\right)\right)}.$$

したがって，前述の式を用いて以下を得る．

$$\frac{1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2a+1)} \le \left(\frac{1}{2m}\right)^a \exp\left\{\frac{a^2}{2m}\left(1+O\left(\frac{a}{m}+\frac{1}{a}\right)\right)\right\}.$$

□

そこで，次数 1 の頂点 i 個と次数 k の頂点 j 個からなる孤立木（isolated trees）を $T(i,j)$ と記し，G_D における $T(i,j)$ の存在可能性に関する定理を導く．なお，以下の定理 1 では近似計算を簡単にするために，k の範囲に関して，$\sigma\to\infty$ となるような $\sigma=\sigma(n)>0$ に対して，$\sigma\le k\le n^{1/8}$ とする．

定理 1

（ i ）$\sigma=\sigma(n)>0$ は，$\sigma\to\infty$ とし，$\sigma\le k\le n^{1/8}$ とする．このとき，$0<\varepsilon<1$ に対して，j が $\frac{3}{\log(1+\varepsilon)}\le j\le \log n\Big/\left(2\log\frac{(1+\varepsilon)e^\alpha}{1+\alpha}\right)$ を満たすとき，ほとんどすべての G_D は $T(i,j)$ を含む．

（ ii ）$\sigma=\sigma(n)>0$ は，$\sigma\to\infty$ とし，$\sigma\le k\le n^{1/8}$ とする．このとき，$0<\varepsilon<1-\frac{1+\alpha}{e^\alpha}$ に対して，j が $2\log n\Big/\log\frac{(1-\varepsilon)e^\alpha}{1+\alpha}\le j\le\frac{n}{k^3}$ を満たすとき，ほとんどすべての G_D は，このような $T(i,j)$ をすべて含まない．

証明

（ i ）確率変数 $X^{(j)}$ をコンフィギュレーションに含まれる $T(i,j)$ の個数とする．このとき，浜口 (2021) における定理から，以下の式が成り立つ．

$$E(X^{(j)}) = \binom{n_1}{i}\binom{n_k}{j}\frac{k^j((k-1)j)!}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2(k-1)j-1)}.$$

なお，$i=(k-2)j+2$ であり，辺の総数は $i+j-1=(k-1)j+1$ 本であることに注意する．さて，この式を近似評価すると，以下を得る．

$$E(X^{(j)}) = \frac{{n_1}^i}{i!}\frac{{n_k}^j}{j!}k^j((k-1)j)!\left(\frac{1}{2m}\right)^{(k-1)j+1}\left(1+O\left(\frac{(kj)^2}{n}\right)\right).$$

ここで，確率変数 $X^{(j)}$ の順序付けられた 2 個の組を $(X^{(j)})_2=X^{(j)}(X^{(j)}-1)$ と記すと，以下を得る．

$$E((X^{(j)})_2)$$
$$=\binom{n_1}{i}\binom{n_k}{j}\binom{n_1-i}{i}\binom{n_k-j}{j}$$

$$\times \frac{(k^j((k-1)j)!)^2}{(2m-1)\cdots(2m-2(k-1)j-1)(2m-2(k-1)j-3)\cdots(2m-4(k-1)j-3)}$$

$$= (E(X^{(j)}))^2\left(1+O\left(\frac{(kj)^2}{n}\right)\right).$$

また，$0 < \varepsilon < 1$ として，以下を得る．ただし，$n!$ の大きさの評価として，以下の不等式を用いる．

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

$$E(X^{(j)}) = \frac{{n_1}^i}{i!}\,\frac{{n_k}^j}{j!}\,k^j((k-1)j)!\left(\frac{1}{2m}\right)^{(k-1)j+1}\left(1+O\left(\frac{(kj)^2}{n}\right)\right)$$

$$\geq \frac{{n_1}^i}{ei}\left(\frac{e}{i}\right)^i \frac{{n_k}^j}{ej}\left(\frac{e}{j}\right)^j k^j\left(\frac{(k-1)j}{e}\right)^{(k-1)j}\frac{e}{2m}\left(\frac{1}{2m}\right)^{(k-1)j}\left(1+O\left(\frac{(kj)^2}{n}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{2meij}\left(\frac{en_1}{i}\right)^i\left(\frac{en_k}{j}\right)^j k^j\left(\frac{(k-1)j}{e}\right)^{(k-1)j}\left(\frac{1}{2m}\right)^{(k-1)j}\left(1+O\left(\frac{(kj)^2}{n}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{2meij}\left(\frac{e}{(k-2)j+2}\,\frac{k(k-2)-\alpha}{(k-1)^2}n\right)^{(k-1)j-j+2}\left(\frac{e}{j}\,\frac{\alpha+1}{(k-1)^2}n\right)^j k^j\left(\frac{(k-1)j}{e}\right)^{(k-1)j}$$

$$\times\left(\frac{k-1}{(k+\alpha)n}\right)^{(k-1)j}\left(1+O\left(\frac{(kj)^2}{n}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{ij}\,\frac{en}{(kj)^2}\left(\frac{(k(k-2)-\alpha)j}{((k-2)j+2)(k+\alpha)}\right)^{(k-1)j}\left(\frac{k(\alpha+1)((k-2)j+2)}{(k(k-2)-\alpha)j}\right)^j\left(1-O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{ij}\,\frac{en}{(kj)^2}\left(\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\Big/\left(1+\frac{\alpha}{k}+\frac{2(k+\alpha)}{k(k-2)j}\right)\right)^{(k-1)j}$$

$$\times\left(\left((1+\alpha)\left(1+\frac{2}{(k-2)j}\right)\right)\Big/\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\right)^j\left(1-O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{ij}\,\frac{en}{(kj)^2}\left(\frac{1+\alpha}{e^\alpha e^{\log(1+\varepsilon)}}\right)^j\left(1-O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\geq \frac{en}{k^3j^4}\left(\frac{1+\alpha}{e^\alpha(1+\varepsilon)}\right)^j\left(1-O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\geq \left(2\log\frac{(1+\varepsilon)e^\alpha}{1+\alpha}\right)^4\frac{n^{1/8}}{(\log n)^4} \to \infty\,.$$

最後から 3 番目および最後の不等式は，$\dfrac{3}{\log(1+\varepsilon)} \leq j \leq \log n\Big/\left(2\log\dfrac{(1+\varepsilon)e^\alpha}{1+\alpha}\right)$ による．

さて，これらの結果を用いて Chebyshev の不等式を適用すると，以下となる．

$$P(X^{(j)}=0) \leq \frac{E((X^{(j)})^2)}{(E(X^{(j)}))^2}-1 = \frac{E(X^{(j)}(X^{(j)}-1))+E(X^{(j)})}{(E(X^{(j)}))^2}-1$$

$$= \frac{E(X^{(j)}(X^{(j)}-1))}{(E(X^{(j)}))^2} - 1 + \frac{1}{E(X^{(j)})} \to 0\ .$$

したがって主張は示された. □

（ⅱ）まず $E(X^{(j)})$ の上限を，補題1，上記（ⅰ）に示す $n!$ の評価式，および以下の不等式を用いて評価する.

$$\binom{n}{r} \leq \left(\frac{en}{r}\right)^r.$$

そして，$0 < \varepsilon < 1 - \frac{1+\alpha}{e^\alpha}$ に対して，以下を得る.

$$\begin{aligned}
E(X^{(j)}) &= \binom{n_1}{i}\binom{n_k}{j} \frac{k^j((k-1)j)!}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2(k-1)j-1)} \\
&\leq \left(\frac{en_1}{i}\right)^i \left(\frac{en_k}{j}\right)^j k^j e(k-1)j\left(\frac{(k-1)j}{e}\right)^{(k-1)j}\left(\frac{1}{2m}\right)^{(k-1)j+1} \exp\left(\frac{((k-1)j+1)^2}{2m}(1+o(1))\right) \\
&\leq \left(\frac{en_1}{i}\right)^i \left(\frac{en_k}{j}\right)^j k^j \left(\frac{(k-1)j}{e}\right)^{(k-1)j}\left(\frac{1}{2m}\right)^{(k-1)j} \frac{e(k-1)j}{2m} \exp\left(\frac{(kj)^2}{m}\right) \\
&\leq O\left(\frac{n}{kj}\right)\left(\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\Big/\left(1+\frac{\alpha}{k}+\frac{2(k+\alpha)}{k(k-2)j}\right)\right)^{(k-1)j} \\
&\quad \times\left(\left((1+\alpha)\left(1+\frac{2}{(k-2)j}\right)\right)\Big/\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\right)^j \exp\left(\frac{(kj)^2}{m}\right) \\
&\leq O\left(\frac{n}{kj}\right)\left(\frac{1+\alpha}{e^\alpha(1-\varepsilon)}\right)^j.
\end{aligned}$$

最後の不等式は，$\exp\left(\frac{k^2 j}{m}\right)$ において，$k^2 j \leq \frac{n}{k}$ が成り立つことによる．したがって，$j_1 = 2\log n/\log\frac{(1-\varepsilon)e^\alpha}{1+\alpha}$ （注：$\frac{(1-\varepsilon)e^\alpha}{1+\alpha} > 1$）とすると，Markov の不等式から以下となる.

$$\begin{aligned}
P((X^{(j_1)} \geq 1) \cup \cdots \cup ((X^{(n/k^3)} \geq 1)) &\leq \sum_{j=j_1}^{n/k^3} P(X^{(j)} \geq 1) \\
&\leq \sum_{j=j_1}^{n/k^3} E(X^{(j)}) \\
&\leq \sum_{j=j_1}^{n/k^3} O\left(\frac{n}{kj}\right)\left(\frac{1+\alpha}{e^\alpha(1-\varepsilon)}\right)^j \\
&\leq O\left(\frac{n}{kj_1}\right)\frac{n}{k^3}\left(\frac{1+\alpha}{e^\alpha(1-\varepsilon)}\right)^{j_1} \\
&\leq O\left(\frac{1}{2k^4\log n}\log\frac{(1-\varepsilon)e^\alpha}{1+\alpha}\right) \to 0\ .
\end{aligned}$$

よって，$P((X^{(j_1)}=0) \cap \cdots \cap (X^{(n/k^3)}=0)) \to 1$ であり，主張は示された. □

定理 1 によれば，G_D は大きさ $k\log n$ のオーダーの孤立木を少なくとも 1 つ含むことになる．これは，Molloy, M and Reed, B（1995 1998）では指摘されていない事実である．

次に，ランダムグラフにおいて，すべての頂点の次数が k である連結成分，すなわち，k–正則（k-regular）部分グラフの存在可能性について評価する．

定理 2

$\log n \le k \le n^{1/8}$とし，j は $k+1 \le j \le n_k$ を満たすとする．また，kj は偶数とする．このとき，ほとんどすべての G_D は，このような頂点数 j 個の k–正則部分グラフをすべて含まない．

証明

確率変数 $X^{(j)}$ をコンフィギュレーションに含まれる頂点数 j 個の k–正則部分グラフの個数とする．頂点数 j 個の k–正則部分グラフは孤立した連結成分となるので，コンフィギュレーションにおいて，それが存在する確率は高々 $\dfrac{(kj-1)(kj-3)\cdots 1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-kj+1)}$ である．また，最小頂点数の k–正則部分グラフは $(k+1)$–完全部分グラフであることに注意する．よって，以下の不等式が成り立つ．なお，以下では，補題 1 および定理 1 の証明に用いた不等式を利用する．

$$
\begin{aligned}
&P((X^{(k+1)} \ge 1) \cup \cdots \cup ((X^{(n_k)} \ge 1)) \le \sum_{j=k+1}^{n_k} P(X^{(j)} \ge 1) \\
&\le \sum_{j=k+1}^{n_k} E(X^{(j)}) \\
&\le \sum_{j=\log n}^{n_k} \binom{n_k}{j} \frac{(kj-1)(kj-3)\cdots 1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-kj+1)} \\
&\le \sum_{j=\log n}^{n_k} \binom{n_k}{j} \frac{(kj)!}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-kj+1)} \frac{1}{2^{kj/2-1}} \frac{1}{(kj/2-1)!} \\
&\le \sum_{j=\log n}^{n_k} \frac{kj(kj-2)}{e} \left(\frac{en_k}{j}\right)^j \left(\frac{kj}{e}\left(\frac{e}{kj-2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{kj}{8m}(1+o(1))\right)\right)^{kj} \\
&\le \sum_{j=\log n}^{n_k} \frac{(kj)^2}{e} \left(\frac{en_k}{j}\right)^j \left(\frac{kj}{e}\left(\frac{e}{kj}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{kj}{2n}\right)\right)^{kj} \\
&\le \sum_{j=\log n}^{n_k} \frac{(kj)^2}{e} \left(\frac{e}{j}\frac{\alpha+1}{(k-1)^2}n\right)^j \left(\left(\frac{kj}{en}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{kj}{2n}\right)\right)^{kj} \\
&\le \sum_{j=\log n}^{n_k} \frac{(kj)^2}{e} \left(\frac{2en}{jk^2}\right)^j \left(2\left(\frac{kj}{en}\right)^{1/2}\right)^{kj} \\
&\le \sum_{j=\log n}^{n_k} \frac{(kj)^2}{e} \left(8\left(\frac{4kj}{en}\right)^{k/2-1}\right)^j \to 0\,.
\end{aligned}
$$

よって，$P((X^{(k+1)}=0)\cap\cdots\cap((X^{(n_k)}=0))\to 1$ となり，主張は示された． □

さて次に，G_D 上の任意の 2 頂点間の距離の最大値，すなわち，G_D の直径（diameter）の大きさを考察する．グラフの直径は，グラフの大きさに関する特徴を表す代表的な基準量の 1 つである．そして，G_D の直径を $\mathrm{diam}(G_D)$ と記す．このとき，G_D の直径の大きさを評価する定理を以下のように提案する．

定理 3

k は $4\le k\le n^{1/8}$ とする．このとき，ほとんどすべての G_D に対して，以下の不等式が成り立つ．

$$\log\left(\frac{n}{(k^2\log n)^2}\right)\Big/\log(\alpha+1)\le \mathrm{diam}(G_D)$$

$$\le \log\left(\frac{2m}{k^2}\log(n_k{}^2\log n)\right)\Big/\log(k(\alpha+1)/(k+\alpha))+1\,.$$

証明

対象にするランダムグラフにおいて，任意の固定した 2 つの頂点を u および v とし，確率変数 $X^{(r)}$ を，u と v をそれぞれ端点とする長さ r のパスの個数とする．このとき，$(kr)^2=o(m)$ の条件の下で $E(X^{(r)})$ を求めると，以下のようになる．

$$E(X^{(r)})=\binom{n_k-2}{r-1}(r-1)!\,(k(k-1))^{r-1}k^2\frac{1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2r+1)}$$

$$=\frac{n_k{}^{r-1}}{(r-1)!}(r-1)!\,(k(k-1))^{r-1}k^2\left(\frac{1}{2m}\right)^r\left(1+O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{(\alpha+1)n}{(k-1)^2}\frac{k(k-1)}{2m}\right)^{r-1}\frac{k^2}{2m}\left(1+O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{k(\alpha+1)}{k+\alpha}\right)^{r-1}\frac{k^2}{2m}\left(1+O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right)\,.$$

まず，主張の左側の不等式から示す．浜口（2020）によれば，このランダムグラフには大きさ $\delta n/k^2$（$\delta>0$）以上の連結成分 C が存在する．そして，E を u と v がともに C に含まれる事象とし，A_r（$1\le r\le r_1$）を u と v は長さ r のパスで接続される事象とする．また，r は（$(kr)^2=o(m)$）を満たすものと仮定する．このとき，以下の不等式が成り立つ．

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{r_1})\ge P(E\cap(A_1\cup\cdots\cup A_{r_1}))=P(E)P(A_1\cup\cdots\cup A_{r_1}|E).$$

ここで，連結成分 C は大きさ $\delta n/k^2$ 以上なので，次数 k の頂点は少なくとも $\delta n/k^3$ 個ある．よって，

$$P(E)\ge\binom{\delta n/k^3}{2}\Big/\binom{n_k}{2}=\left(\frac{\delta n}{k^3 n_k}\right)^2\left(1-O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\delta n}{k^3}\frac{(k-1)^2}{(\alpha+1)n}\right)^2\left(1-O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right)\ge\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^2.$$

ただし，$\varepsilon=\dfrac{\delta}{2(\alpha+1)}$ とする．また，$\binom{\delta n/k^3}{2}\Big/\binom{n_k}{2}=\binom{n_k-2}{\delta n/k^3-2}\Big/\binom{n_k}{\delta n/k^3}$ に注意する．したがって，

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{r_1}) \geq \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^2 P(A_1 \cup \cdots \cup A_{r_1} | E).$$

すなわち，

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{r_1} | E) \leq \frac{k^2}{\varepsilon^2} P(A_1 \cup \cdots \cup A_{r_1}) \leq \frac{k^2}{\varepsilon^2} \sum_{r=1}^{r_1} P(A_r).$$

ところで，$P(A_r)$ は，Markov の不等式および先に求めた $E(X^{(r)})$ から以下のように評価できる．

$$\begin{aligned} P(A_r) &= P(X^{(r)} \geq 1) \leq E(X^{(r)}) \\ &\leq \left(\frac{k(\alpha+1)}{k+\alpha}\right)^{r-1} \frac{k^2}{2m} \left(1 + O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

したがって，前述の式において，$r_1 = \log\left(\frac{n}{(k^2 \log n)^2}\right) \Big/ \log(\alpha+1)$ とすれば（このとき，$1 \leq r \leq r_1$ は最初に掲げた前提条件 $(kr)^2 = o(m)$ を満たすことに注意），

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_{r_1} | E) &\leq \frac{k^2}{\varepsilon^2} \sum_{r=1}^{r_1} \left(\frac{k(\alpha+1)}{k+\alpha}\right)^{r-1} \frac{k^2}{2m} \left(1 + O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right) \\ &\leq \frac{2k^4}{\varepsilon^2 n} r_1 \left(\frac{k(\alpha+1)}{k+\alpha}\right)^{r_1 - 1} \\ &\leq \frac{2k^4}{\varepsilon^2 n} r_1 (\alpha+1)^{r_1} \\ &\leq 2 \log \frac{n}{(k^2 \log n)^2} \Big/ ((\varepsilon \log n)^2 \log(\alpha+1)) \\ &= O\left(\frac{1}{\log n}\right) \to 0\ . \end{aligned}$$

この事実は，u と v がともに連結成分 C に含まれる条件下で，この 2 つの端点間の距離は r_1 より大きいことを意味する．すなわち，G_D の直径は r_1 より大きくなる．

次に，主張の右側の不等式を示す．まず前述と同様に，$(kr)^2 = o(m)$ の条件の下で $E(X^{(r)})$ を求めると，以下となる．

$$E(X^{(r)}) = \frac{{n_k}^{r-1}}{(r-1)!} (r-1)!\, (k(k-1))^{r-1} k^2 \left(\frac{1}{2m}\right)^r \left(1 + O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right).$$

ここで確率変数 Y を，確率変数 $X^{(r)}$ の順序付けられた t 個（t は固定した，任意の正の整数）の組として，以下のように定義する．

$$Y = (X^{(r)})_t = X^{(r)} (X^{(r)} - 1) \cdots (X^{(r)} - t + 1).$$

そして Y を，頂点を互いに共有しない t 個のパスの組 Y_1 と少なくとも 1 個の頂点が共有される t 個のパスの組 Y_2 に分解する．すなわち，$Y = Y_1 + Y_2$ である．このとき，$(kr)^2 = o(m)$ なので，以下の式が成り立つ．

$$E(Y_1)=\binom{n_k-2}{r-1}\binom{n_k-2-(r-1)}{r-1}\cdots\binom{n_k-2-(t-1)(r-1)}{r-1}((r-1)!)^t$$
$$\times((k(k-1))^{r-1})^t(k(k-1)\cdots(k-t+1))^2\frac{1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2tr+1)}$$
$$=(E(X^{(r)}))^t\left(1+O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right).$$

一方，$E(Y_2)$ の大きさを評価すると，t 個のパスの間で少なくとも 1 個の頂点が共有されるので，パス全体の頂点を選択する組み合わせの数は，頂点を互いに共有しない場合に比べて，r/n_k 倍以下となる．よって，以下を得る．

$$\frac{E(Y_2)}{E(Y_1)}=O\left(\frac{r}{n_k}\right)=O\left(\frac{rk^2}{n}\right).$$

したがって，

$$E((X^{(r)})_t)=E(Y)=E(Y_1)+E(Y_2)$$
$$=E(Y_1)\left(1+O\left(\frac{rk^2}{n}\right)\right)$$
$$=(E(X^{(r)}))^t\left(1+O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right)$$
$$=\left(\left(\frac{k(\alpha+1)}{k+\alpha}\right)^{r-1}\frac{k^2}{2m}\right)^t\left(1+O\left(\frac{(kr)^2}{n}\right)\right).$$

したがって，$\lambda_r=\left(\frac{k(\alpha+1)}{k+\alpha}\right)^{r-1}\frac{k^2}{2m}$ とすると，Poisson の近似定理（例えば，Bollobás（2001）参照）から，以下が成り立つ．

$$P(X^{(r)}=i)\sim e^{-\lambda_r}\lambda_r^{\,i}/i!.$$

よって，

$$P(X^{(r)}=0)\sim 1/e^{\lambda_r}.$$

ここで，コンフィギュレーション上の次数 k のすべての頂点対に対して，$1,2,\ldots,\binom{n_k}{2}$ のように任意に番号付けして，i 番目の頂点対に対する $X^{(r)}$ を $X_i^{(r)}$ と記す．そして，$r=r_2=\log\left(\frac{2m}{k^2}\log(n_k^{\,2}\log n)\right)\Big/\log(k(\alpha+1)/(k+\alpha))+1$ とすると，$(kr_2)^2=o(m)$ を満たす，したがって，以下を得る．

$$P\left(\left(X_1^{(r_2)}=0\right)\cup\cdots\cup\left(X_{\binom{n_k}{2}}^{(r_2)}=0\right)\right)\le\sum_{i=1}^{\binom{n_k}{2}}P\left(X_i^{(r_2)}=0\right)$$
$$=\binom{n_k}{2}e^{-\lambda_{r_2}}(1+o(1))=n_k^{\,2}\Big/\left(2\exp\left(\left(\frac{k(\alpha+1)}{k+\alpha}\right)^{r_2-1}\frac{k^2}{2m}\right)\right)(1+o(1))$$

$$= \frac{1}{2\log n}(1+o(1)) \to 0\ .$$

すなわち，$P\left(\left(X_1^{(r_2)} \geq 1\right) \cap \cdots \cap \left(X_{\binom{n_k}{2}}^{(r_2)} \geq 1\right)\right) \to 1$ である．これは，どの頂点対にもそれらの頂点対を結ぶ長さ r_2 のパスが存在することを意味するので，G_D の直径はそれ以下となる．したがって，主張は示された． □

上で示した直径の大きさを，Bollobás and Vega（1985）によるランダムな k-正規グラフのそれと比較すると，次のようになる．すなわち，Bollobás and Vega（1985）による k-正規グラフの直径はおおよそ $\log n/\log(k-1)$ であるのに対して，上の結果による G_D の直径はおおよそ $\log(n/(k^2\log n)^2)/\log(\alpha+1)$ から $\log(n/k^2)/\log(\alpha+1)$ である．k が定数の場合，直径はともに $\log n$ のオーダーになるが，そうでない場合は，かなり差（後者の方が大きい）があることがわかる．

4. 課題

引き続き考察を行って，次回にまとめを行う予定である．

参考文献

B. Bollobás, *Random Graphs*（2nd edition）(2001). Cambridge Univ. Press.

B. Bollobás and W.F. de la Vega, “The diameter of random regular graphs”, *Combinatorica,* 2（1982).

M. Molloy and B. Reed, “The Size of the Largest Component of a Random Graph on a Fixed Degree Sequence”, *Combinatorics, Probability and Computing* 7, 295-306（1998).

M. Molloy and B. Reed, “A Critical Point for Random Graphs with a Given Degree Sequence”, *Random Structures and Algorithms* 6, 161-180（1995).

浜口幸弘, 特定の次数列を満たすランダムグラフの大きさについて, 明治学院大学経済研究 160 (2020).

浜口幸弘，特定の次数列を満たすランダムグラフの大きさについてⅡ，明治学院大学経済研究 162（2021).