公共財を含む資源配分問題の図解

高橋　青天

明治学院大学経済学部

（2007/11,修正）

＜要旨＞

Kolm（1970）で用いられた図、コルム三角形を使い、公共財を含む資源配分問題の重要な課題である１）パレート効率性とコア、２）リンダール均衡とコア、３）公共財の自発的供給問題、を平面図のみで図解する。このような分析手法を採ることにより、高等数学を一切使うことなく、問題の核心を直感的に理解することができるという利点がある。

公共財を含む資源配分問題の図解

明治学院大学　高橋　青天[1]

１．　はじめに

私的財のみの交換からなる２人・2財モデルを使ったパレート効率な資源配分の解説では、「エッヂワースのボックス図」が多くの教科書で用いられている。これとは対称的に、公共財を含む２人・２財モデルの資源配分問題では、Samuelson(1955)で使われた生産可能性曲線と片方の個人の無差別曲線を描く図を使って一般均衡的説明がされたり、「リンダール均衡」に関しては、限界費用曲線と２人の限界便益曲線が描かれた図を使った部分均衡的説明がされたりするのが一般的傾向である。しかしながら、公共財を含む資源配分問題の分析においても、「エッジワースのボックス図」に類する図を使った統一的な説明も、少数であるが試みられてきた。例えば、ここで論じられる「コルム三角形」だけでなく、これとは異なる図を用いて同様の分析を試みたものとして、Dolbear (1967), Shibata(1971)や Cornes and Sandler (1985,1986)などを挙げることができる。

S.-C. Kolm [2]は、*La Valeur Publique* (1970) の第９章で、公共財を含む２人・２財モデルの資源配分問題を、公共財と２人の私的財の軸からなる３次元図を使い分析した。初期保有資源が与えられたとき、公共財と２人の私的財の座標軸から成る３次元図上の単体を原点から眺めると、正三角形となっている。この正三角形を二次元平面上に描いたものが「**コルム三角形**」といわれるものである。コルム正三角形を使用することにより、公共財を含む資源配分問題を平面図だけを使って統一的に議論することができる非常に便利な図である。それにもかかわらず、Thomson (1999) が出版されるまでは、欧米の大学でも一部の研究者によってのみ用いられるに過ぎなかった。その理由は、原文がフランス語で書かれていたこと、また、これとは異なる図を用いた競合的な説明が個々の研究者により使われたためであると思われる。実際、今日に至るまで、標準的な欧米の初級、中級を含めた公共経済学の一般的な教科書はもちろん、日本の公共経済学の標準的教科書でも、まったくといっていいほどコルム三角形への言及はない[3]。このような状況は、Ley (1996) でも述べられているが、今日でもその状況はほとんど変わっていないと思われる。

本論文の目的は、高度な数学的な記述を使うことなく、平面図のコルム三角形を使って、１）パレート効率性とコア、２）リンダール均衡とコア、３）ナッシュ均衡によ

[1] 三井清教授（学習院大学）と小平裕教授（成城大学）より貴重なコメントを頂きました。また第６４回日本財政学会での田平正典教授（兵庫県立大学）からのコメントにも感謝申上げます。吉田雅敏教授（筑波大学）からは、コアとリンダール均衡に関する二階堂論文の存在を指摘して頂き、旧稿の校正に大いに助けになりました。記して感謝申し上げます。なお、本稿に存在する誤りはすべて著者に帰します。

[2] S.-C. Kolm は、公共選択の分野で多くの貢献がある。詳しくは、Kolm自身のホーム・ページ (http://www.ehess.fr/kolm/) を参照のこと。そこには、「コルム三角形」の原文も掲載されている。後に述べるように、Nikaido (1976) では、Kolm (1970) と同様の図を使い、コアとリンダール均衡が分析されている。

[3] 例外として、中級教科書である J.-J. Laffont (1987) の２章では、コルム三角形が数学的説明の補助として用いられている。また、日本語では、奥野・鈴村（1988）の第 33 章、田平（2003）の第９章や西条（2000）で解説されている。

る公共財の自発的供給問題、さらに４）ナッシュ均衡の中立性命題、などの公共財に関する主要問題を直感的に説明することにある。このことを通じて、「コルム三角形」が「エッヂワース・ボックス図」と同様に、公共財を含む資源配分問題の直感的理解に有用であることを示すことである。

各節の構成は以下の様になっている。２節では、各経済主体の無差別曲線と予算線から構成される通常の効用最大化の図から出発し、それをコルム三角形へ変換する方法が説明される。３節では、こうして作成されたコルム三角形を使い、コルム三角形上でのパレート効率な資源配分が考察される。さらに、私的財に関する資源配分問題の場合と同様に、「コア」の概念が定義され、その性質が測度論などの高等数学を使わずに図のみで分析される。４節では、「コア」と「リンダール均衡」の関係を分析する。5節では、各個人が自主的に公共財を供給する場合のナッシュ均衡が分析される。6節では、5節で議論されたナッシュ均衡が、初期資源保有の再分配の影響を受けないという「中立性命題」が「コルム三角形」を使って直感的に説明される。7 節では、「コルムの三角形」と、Shibata (1971)や柴田・柴田(1988)で用いられた「扇形ダイアグラム」との比較を行う。８節は、まとめに当てられている。

２．　「コルム三角形」の作成

コルムの三角形が想定するモデルは、基本的にエッジワース・ボックス図と同じ２人・２財交換モデルである。すなわち、２財の初期保有量が与えられた経済主体二人が、それら２財を交換するという想定である。ボックス図との重要な相違点は、１）私的所有可能な**私的財**だけでなく、**完全非排除性**と**完全非競合性**という両性質を備え持つ**公共財**（純公共財）が追加され、それを各人が消費し、さらに２）公共財は一定の技術制約のもとで私的財から変換される、という２点である。次にコルム三角形が想定するモデルの仮定を列挙しておく。

仮定１：A と B の二人の交換経済である。

仮定２：私的財と、完全非排除性かつ完全非競合性を持つ公共財の２種類の財が存在する。

仮定３：各人は私的財の形で一定の初期保有量を所有しており、私的財と公共財を消費する。

仮定４：私的財と公共財は１対１で技術的に変換される。経済学の用語で言えば、私的財と公共財の限界変形率（MRT）が１に固定されていると仮定することを意味している[4]。

さらに、これからの議論のために次の記号を定義しよう。

[4] 生産可能性曲線（Production Possibility Frontier）が傾き（-1）を持つ直線となることを意味している。この仮定は技術に関する特殊な仮定であるが、それを補って余りある図解の利便性を与えてくれる。

g：両者の公共財消費量,

x_i：i の私的財消費量（i=A, B）

w_i：i の資源の初期保有量（i=A, B）

これら仮定の下で、エッジワース・ボックス図（以下、ボックス図と略す）の作成の手順に沿ってコルム三角形を作成する。まずAの実行可能な消費配分を考える。ボックス図では、まずAがすべての資源 w（ここでは、$w = w_A + w_B$）を消費できる場合の実行可能配分を表す矩形図を作成する。コルム三角形の場合は、限界変形率が１なので、図１では生産可能性曲線が（-1）の傾きを持つ直線F w で描かれている。$0_A F$ がAの消費可能な最大公共財水準であり、$0_A w$ がAの消費可能な最大私的財水準である。従って、直角二等辺三角形 $F0_A w$ 上[5]の任意の点は実行可能な消費配分を表している。また、明らかにこの直角二等辺三角形上に通常の仮定を満たす個人Aの無差別曲線を描くことができる。いま、図１の直角二等辺三角形上の任意の配分点Eを図２上の点へ変換することを考えよう。このとき、次の性質を証明できる。

（性質１）図１の*各個人の実行可能な任意の消費配分点は、図２の正三角形 KLF'上の対応する点として描くことができる。*

証明：点Ｆから横軸に平行な線を引き、図２で描かれた 60 度の傾きを持つ原点からの直線との交点を F'とする。さらに、図２の横軸上から 60 度の斜線へ垂線を下ろし、

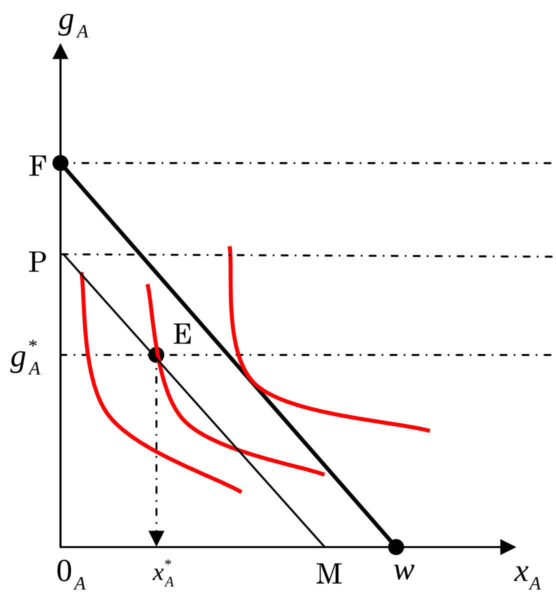

図１

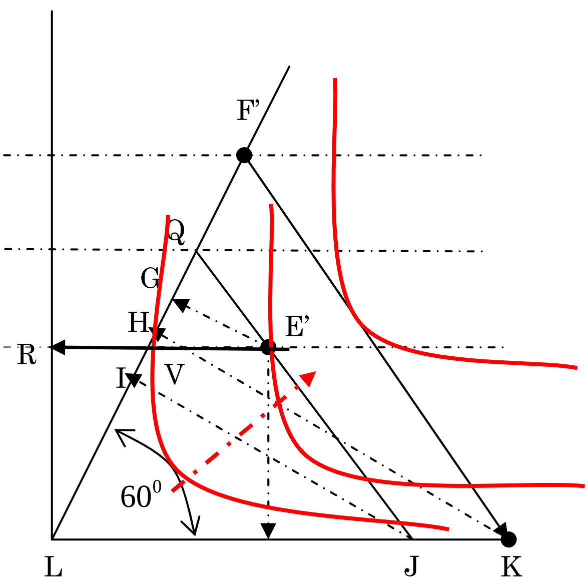

図２

[5] 「三角形上の点」とは、三角形の三辺で囲まれた領域の内点だけでなく、三角形の三辺上の点も含む。

その長さが $0_A w\,(=0_A F)$ となるような横軸上の点を K、また点Kからの垂線の足を点 H とする。さらに、点 K と点 F'を結び三角形 LF'K が作成でき、この三角形は明らかに正三角形となる。

この正三角形 LF'K 上の任意の点が実行可能な配分となることを示す。そのためには、図１の実行可能な配分点Eを図２の正三角形上の点 E' へ移すことが可能であることが示されればよい。図１の点Eを通って生産可能性曲線 Fw に平行な線 PM を引く。さらに、図２の底辺ＬＫ上に点Ｊを取り、その点から辺 QL への垂線の長さが図１の $0_A M$ に等しくなるようにする。また、点Ｊから F'K に平行に直線を引きその交点を Q とする。このとき、三角形 JLQ は正三角形となる。正三角形の性質から、点Ｑより垂線を辺 LJ へ下ろすと、その長さは J からの垂線 JI の長さに等しくなっている。ここで、直角二等辺三角形の性質から、図１の $0_A M$ が $0_A P$ に等しいので、$0_A M = JI$ が成立している。いま、図１の点Ｅから横軸に平行な線を引き、それが図２の正三角形 JLQ の辺 QJ と交わる点を E'とする。点 E'から底辺 LJ へ垂線を下ろすと、その垂線の長さはＡの公共財消費量 g_A^* を表している。 次に、点 E'から辺 LQ へ垂線をおろし、その垂線 E'G の長さが図１の点Ｅでの私的財消費量であることを示すことにする。まず、これまでの議論と三角形と平行線に関する比率から、次の比が成立していることを確かめることができる。

$$\frac{0_A x_A^*}{0_A M} = \frac{PE}{PM} = \frac{QE'}{QJ} = \frac{E'G}{JI} \tag{1.1}$$

最初の等号は、図１の三角形 $M0_A P$ に関する比率から、また二番目と最後の等号は三角形 QJL と平行線の比率から求められる。さらに、次の比も成立している。

$$\frac{0_A M}{0_A w} = \frac{0_A P}{0_A F} = \frac{JI}{KH} \tag{1.2}$$

ここで、最初の等号は三角形 $w0_A F$ に関する比率から、最後の比は、正三角形 LQJ の高さが $0_A P$ に、また正三角形 LF'K の高さが $0_A F$ に等しくなることから導かれる。こうして、(1.1)と(1.2)の第１項、さらに(1.1)の第４項と（1.2）の第３項をそれぞれ掛け合わせることにより、

$$\frac{0_A x_A^*}{0_A w} = \frac{E'G}{KH}$$

が導かれる。作図方法より、KH=$0_A w$ が成立するので、$E'G = 0_A x_A^*$ が最終的に導かれる。こうして、図１の実行可能な任意の消費配分点 E が図２の正三角形上に点 E'として描かれた。この作業を繰り返すことにより、図１の実行可能な任意の点を図２の三角形上に描くことができる。従って、これらの点に関する選好を示す図１の無差別曲線も図２の三角形上に同様に描くことができる。（証明了）

性質１は座標変換の視点からも議論できる。図２の E’ 点は、元の直行座標軸(x_A, g_A)で測った場合、E 点をg_A の値を保ったまま、x_A の値が E’R に等しくなるように横軸に平行移動させた点である、と見なすこともできる。いま E’点の元の直交座標での座標を(α,β)、また変換後の傾斜座標軸 F’L での座標を(x , y) とする。このとき、２つの直角三角形 LRV と TGE’に関する比から、座標変換式は以下のようになることが分かる。

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y \\ \\ \beta = y \end{cases}$$

ここで、性質１で得られた正三角形 LF’K を「Ａの実行可能三角形」とよぶことにしよう。まったく同様の議論が個人Ｂに関しても成立し、Ｂの実行可能な任意の点を図２と同じ「Ｂの実行可能三角形」上に描くことができる。ただし、Ｂの選好はＡのように点Ｌから矢印方向に測るのではなく、点Ｋから北西方向に図ることになる。さらに、このようにして描かれた合同な正三角形であるＡとＢの実行可能三角形を図３で示されているように、左右から合体させることにより「**コルム三角形**」が最終的に作図される。

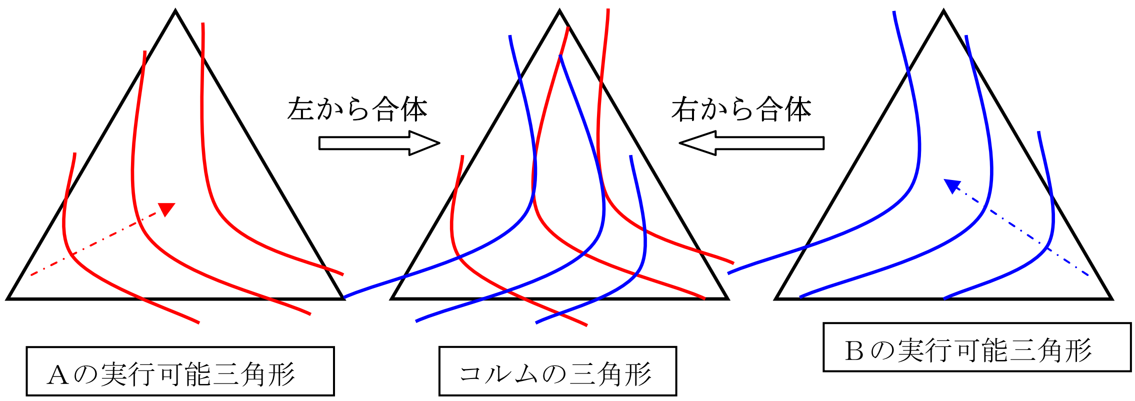

図３

３． パレート効率配分とコア

もう一度、コルム三角形の性質を整理しておこう。これまでの議論から導かれたコルム三角形が図４として描かれている。図４に描かれたコルム三角形の右辺は個人 A の私的財消費量ゼロの配分を、左辺は個人 B の私的財消費量ゼロの配分をそれぞれ表している。また、底辺は公共財の消費量ゼロの配分を表している。いま、任意の配分点がコ

ルム三角形内の点Ｚで与えられているとする。このとき、我々の作図方法より、A，B両者の私的財消費量と公共財消費量の合計は、両者の初期保有量合計 w を超えることができない。この条件は**資源配分の実行可能条件**と呼ばれ、次の不等式として表わされる。

$$\text{(実行可能条件)} \qquad w = (w_A + w_B) \geq g + (x_A + x_B)$$

さらに、点 Z が上記の関係を等号で成立させる「**効率的配分点**」となっていることが正三角形の性質から証明される。

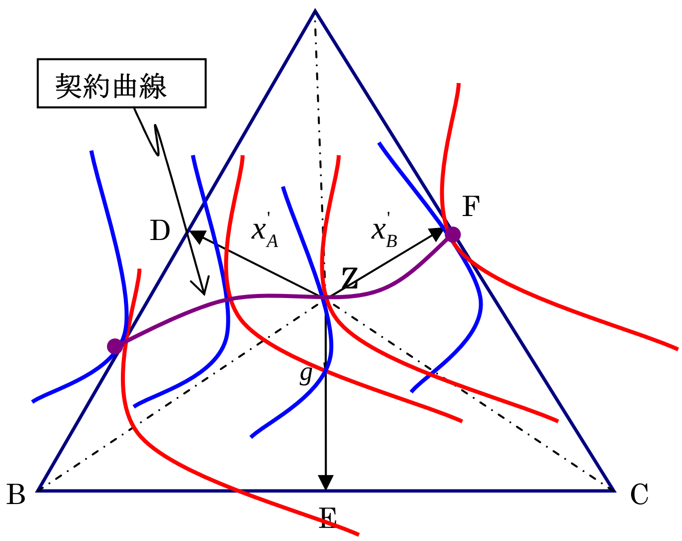

図４

（性質２） *コルム三角形上の任意の点は効率的配分である。*

証明：いま、正三角形の辺の長さを a としよう。さらに DZ=x_A'（Aの私的財の消費量)、FZ=x_B' （B の私的財の消費量)、EZ=g'（公共財消費量）とする。このとき、正三角形の面積は、$a\left(w_A + w_B\right)/2$ で計算される。また、この面積は、点 Z から各辺への垂線を使って、$(a \times x'_A + a \times x'_B + a \times g')/2 = a(x'_A + x'_B + g')/2$ とも計算できる。両計算結果は当然等しくならなければならないので、$w_A + w_B = x'_A + x'_B + g'$ が成り立たねばならない。従って、点 Z で示される配分は実行可能性の条件を等号で満たしている。**(証明了)**

以上から、コルム三角形上の任意の点Ｚは効率的資源配分を表している。さらに、ボックス図の場合とまったく同様の議論を使うことにより、AとBの両者の無差別曲線が接する点は明らかに**パレート効率**となる。それらの点を結ぶことにより「**契約曲線**」をコルム三角形上に描くことができる。こうして、ボックス図と同様、パレート効率な

消費配分点の集合から成る契約曲線を描くことができた。このように、パレート効率な資源配分をボックス図の場合とほぼ同じようにコルム三角形を使って直感的に捉えることができる。

　ここまでの議論で契約曲線が導かれ、それがパレート効率な資源配分点から構成されることがわかった。よく知られているように、パレート効率性のためには次の「**サミュエルソン条件**」が成立せねばならない。

$$\text{（サミュエルソン条件）}\quad MRS_A + MRS_B = MRT = 1$$

次に、契約曲線上の任意の点でサミュエルソン条件が成立していることを示す。いま、コルム三角形の契約曲線上の点 Z でＡ，Ｂ両者が共有する接線が底辺 BC と交わる点を点 W とする。ここで、底辺上の点は各人の公共財消費水準がゼロを表しているので、点Wから各辺への垂線を引くことにより、垂線の長さが各個人の私的財の初期保有量を表わしている。このことから次の性質３を証明できる。

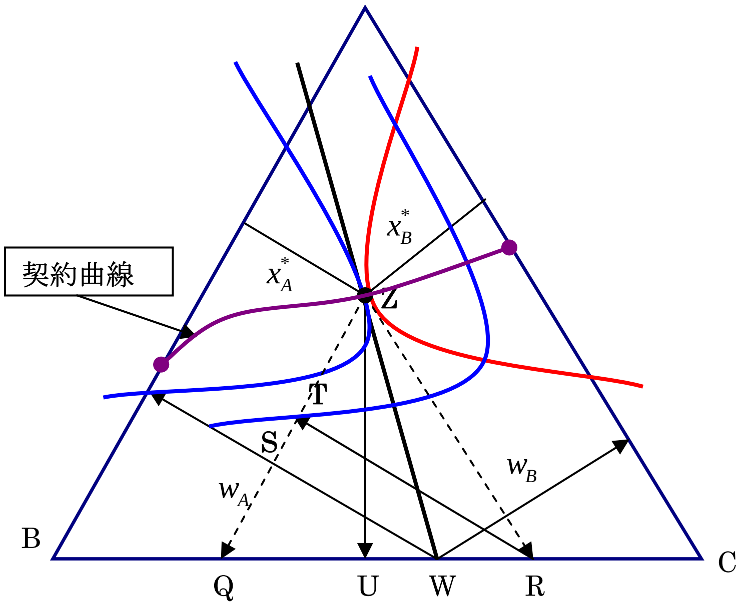

図５

（性質３）パレート効率配分を表す点 Z はサミュエルソン条件を満たしている。

証明： 補助線 WZ は、ＡとＢの無差別曲線の共通の接線となっている。いま、両者の点 Z での限界代替率を計算しよう。コルム三角形上の点Ｚを通常の予算線が描かれた下記の図 1’に戻って考えると、個人Ａの点Ｚでの限界代替率 $(MRS_A(Z))$ は明らかにＡの予算線の傾きに等しくなるので、$MRS_A(Z) = g^* / (w_A - x_A^*)$ と計算される。公共財 g^* は両者に

よって共通に消費されるので、図 1' の横軸と縦軸を入れ換えて、$(w_A^* - x_A^*)/g^*$ と定義するのが便利である。Ｂの限界代替率も同様にして、$(w_B^* - x_B^*)/g^*$ と定義できる。次に、これら比率がコルム三角形上でどのように表されるのか考えよう。図５において、点Ｚから底辺ＢＣに垂線ＺＵを引く。これまでの議論から、その長さは g^* である。さらに、点Ｚからコルム三角形の各辺に平行な斜線を引く。さらに、それら斜線と底辺との交点を、それぞれ点Ｑ、点Ｒとする。この作図法から、三角形ＺＱＲは正三角形となることが分かる。ここで、ＳＷの長さが $(w_A - x_A^*)$ に等しくなるので、Ａの限界代替率は SW/ZU と表される。

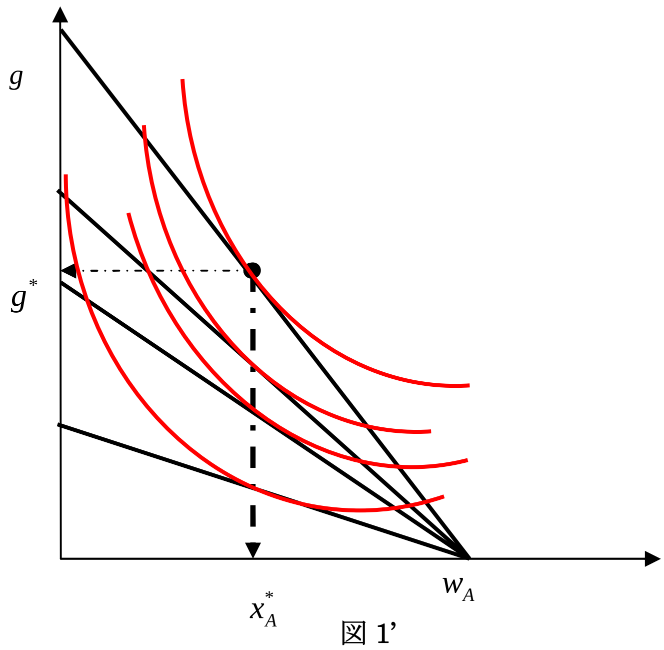

図 1'

いま、点Ｒより辺ＺＱへ垂線を下ろし、その足を点Ｔとする。ここで三角形ＺＱＲが正三角形なので、$ZU = RT$ が成立し、$SW/ZU = SW/RT$ となる。さらに、この比を三角形ＴＱＲを使って書き換えると、最終的に $SW/RT = QW/QR$ が導かれる。従って、$MRS_A(Z) = g^*/(w_A - x_A^*) = QW/QR$ が求められる。同様にして、Ｂの限界代替率は、$MRS_B(Z) = g^*/(w_B - x_B^*) = WR/QR$ となる。これらの結果を使って、次式が成立することが分かる。

$$MRS_A(Z) + MRS_B(Z) = (QW/QR) + (WR/QR) = 1 = MRT$$

従って、点Ｚでサミュエルソン条件が成立している。(証明了)

Nikaido (1976)は、コルム三角形[6]と同じ正三角形を使い、公共財を含む資源配

[6] Nikaido (1976) ではコルムの三角形に関する直接的な言及は行われていないが、Kolm (1970) と同様の図を使い分析が行われている。より正確を記せば、ここでの平面図ではなく (x_A, x_B, g) を軸とする三次元

分に関するコアとその性質を分析した。 Nikaido (1976) に従って、コアを定義しよう。私的財の場合と同様にコアは契約曲線の部分集合として定義される。いま図６のようにA,B両者の初期保有点が点Wで与えられているとする。このときAとBの初期保有量は図５と同じように w_A, w_B とそれぞれ与えられているとする。図６の辺ACに平行な直線DWは、Aが初期保有 w_A を使って生産可能な私的財と公共財のペアを表す生産可能性フロンティアである。いま、AとBが孤立経済のもとで最適化行動を行っているとしよう。このとき、各自の生産可能性フロンティア（各自の予算線となる）上で個別に効用の最大化を行った時の最適点が直線DW上の点Sで示されている。同様に、Bの最適点が直線FW上の点Hで示されている。

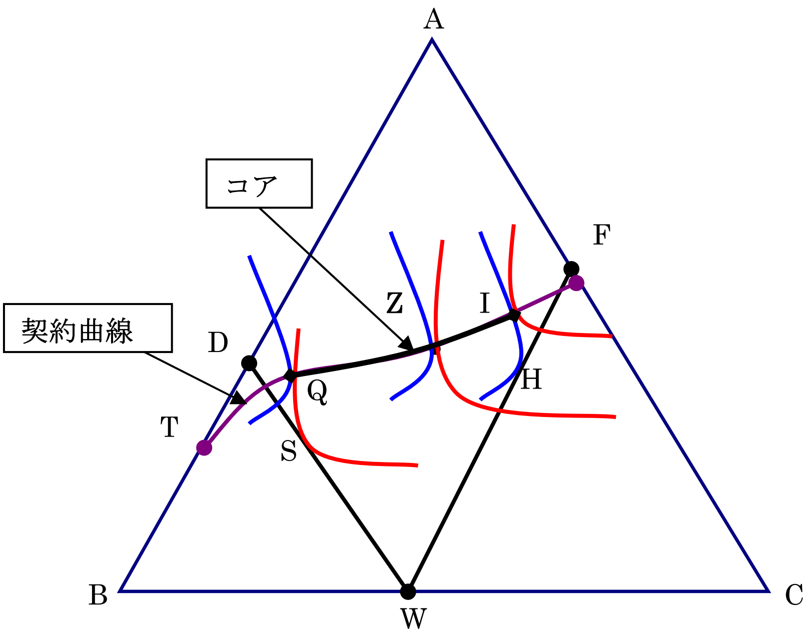

図 6

明らかに、点 S で接する無差別曲線と点 H で接する無差別曲線で囲まれた契約曲線上のどの配分点も、点 S と点 H で得られる満足に比較して、A と B の両者により高い満足を与えることがわかる。従って、孤立経済の状態よりも、A と B の間でなんらかの再分配を行って、QI で表される曲線上の配分点（例えば点 Z など）に移動することがパレート改善となる。このような配分点は、個人 A によっても、あるいは A と B の２人によっても拒否されない配分である。このような配分点の集合は、エッジワース・ボックス図の場合と同様、「**コア（Core）**」と呼ばれている。

いま、個人 A と同一の経済主体を「タイプ A」と、個人 B と同一の経済主体を「タイプ B」と呼ぶことにする。このとき、私的財に関するコアについては、A と B と同じタイプの経済主体の数を増やしていくと縮小し、その極限では競争均衡に等しく

図を使って分析している。

なることが知られている（「コアの極限定理」と呼ばれている)。公共財を含む経済で極限定理が成立するかどうかということは、興味のある問題である。このことを分析するため、図６で表された経済を「基本経済（basic economy)」（E と表示）と呼び、それをもとにして構成された「n 倍複製経済（n-fold replicated economy)」（E^n と表す）を次で定義する。

定義：資源配分（$g, x_{A1}, x_{A2}, \cdots, x_{An}, x_{B1}, x_{B2} \cdots, x_{Bn}$）は、以下の条件（＊）を満たすとき、***n 倍複製経済***と呼ばれ、E^n と表示される。

（＊） $g + \sum_{i=1}^{n} x_{Ai} + \sum_{i=1}^{n} x_{Bi} = nw$

ここで x_{Ai} は A タイプの人の私的財消費量を表し、x_{Bj} は B タイプの人の私的財消費量を表している。また、w は初期資源量を表している。

　　この定義から、もし (g^*, x_A^*, x_B^*) が基本経済 E の資源配分を表すとき、n 倍複製経済の資源配分は次の条件を満たす。

$$g = ng^*$$

$$x_{Ai} = x_A^* \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$x_{Bj} = x_B^* \quad (j = 1, \cdots, n)$$

コルム三角形を使って、基本経済 E から２倍複製経済 E^2 を作図しよう。図７は図６から、ここでの説明に不要なものを消去した基本経済を表すコルム三角形の図である。いま点 Z が基本経済 E の資源配分 (g^*, x_A^*, x_B^*) を示しているとする。n=2 より、A に関する私的財配分を表す直線 ZD を延長し、ちょうどもとの長さの２倍になるように点 D’まで伸ばす。同様に B に関しても直線 ZF を２倍に点 F’まで延長する。さらに公共財の配分を表す直線 ZW も点 W’まで２倍に延長する。このようにして得られた３点に関して、それぞれの点を通り、もとの正三角形の各辺に平行になるように直線を引くと、正三角形 A’B’C’が得られる。 この作図方法より、正三角形 A’B’C’の一辺はもとの正三角形 ABC の２倍になっていることが簡単にわかる。同様にして、元の正三角形 ABC 上の任意の配分点を使って、その配分点に関する２倍複製経済を表す正三角形を作成することができる。また、各配分に関して n 倍に伸ばすことにより、n 倍複製経済のコルム三角形を作成することができる。私的財のみからなる経済では、このようにして構成された２倍複製経済においては、個人同士が提携（coalition）することにより彼らの状態が改善し、コア配分集合が縮小していくことが知られている。しかし、Nikaido (1976) で証明されたように、公共財を含む場合はそのような

縮小が起こらず、コア配分集合がそのまま残ることになる。このことは、基本経済 E のコア配分集合として図７の正三角形 ABC に QI と描かれたものが、２倍複製経済を示す正三角形 A'B'C'でもコア配分集合を表していることを意味している。同様のことが n 倍複製経済に関しても一般的にいえる。

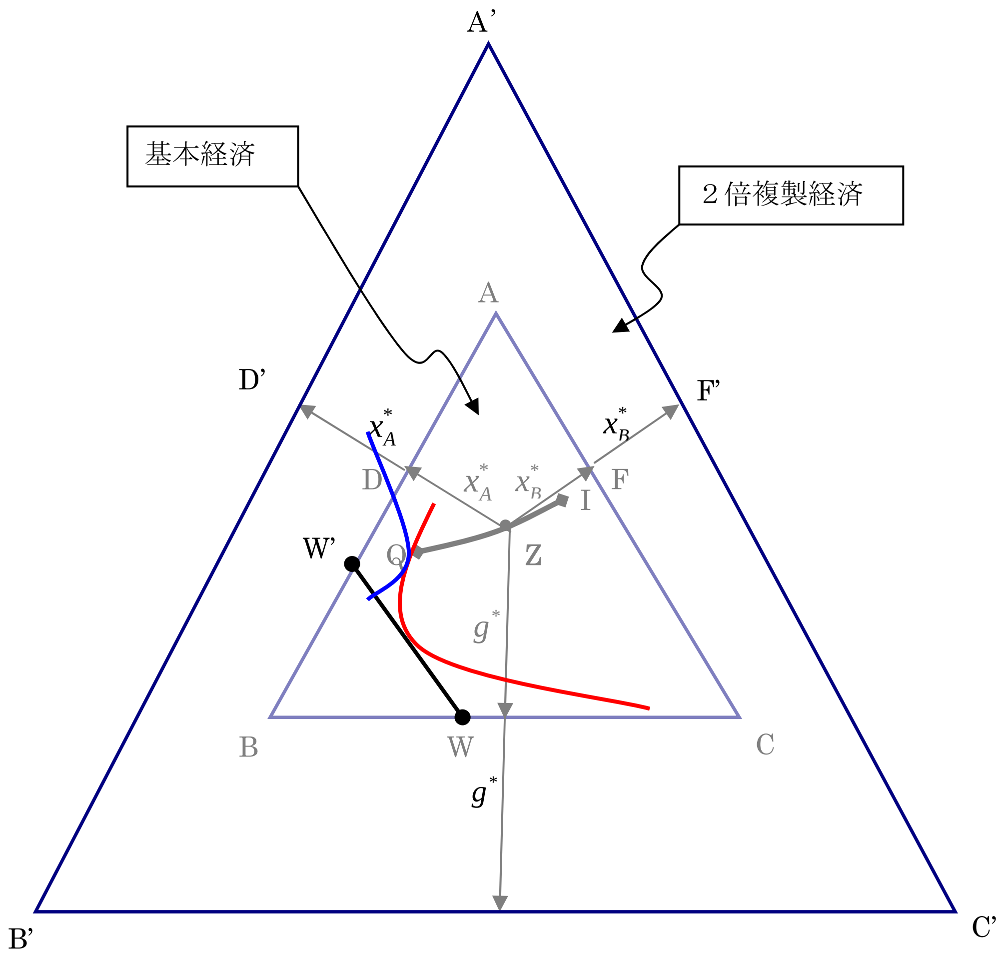

図７

ここでは､A タイプの個人２人と B タイプの個人１人の３人が提携することにより、図７の基本経済のコア配分を表す点 Q よりも３人にとってより良い配分を構成できないことを示すことにする。言葉を代えて言えば、経済 E でのコア配分点 Q が、二倍複製経済でも消えないことを証明する。

図７と同じ図が図８として描かれている。まず、タイプ A の孤立経済での予算線である W'W 直線に平行な点 Q を通る直線 D'QP を描く。この直線上の点で、公共財水準が点 Q の配分の二分の一になる配分点 F を選ぶ。もし配分点 F がタイプ A の個人にとって配分点 Q よりも低い満足しか与えないような配分点であれば、そもそもこのような提携を計

画する意味がない。従って、以下の議論ではこの配分点 F でのタイプ A 個人の満足は、配分点 Q よりも高くなっていると仮定して議論を進める。言葉を代えて言えば、図８に描かれているように、直線 QP 上にある点 F は点 Q を通る無差別曲線で囲まれた領域の内側に

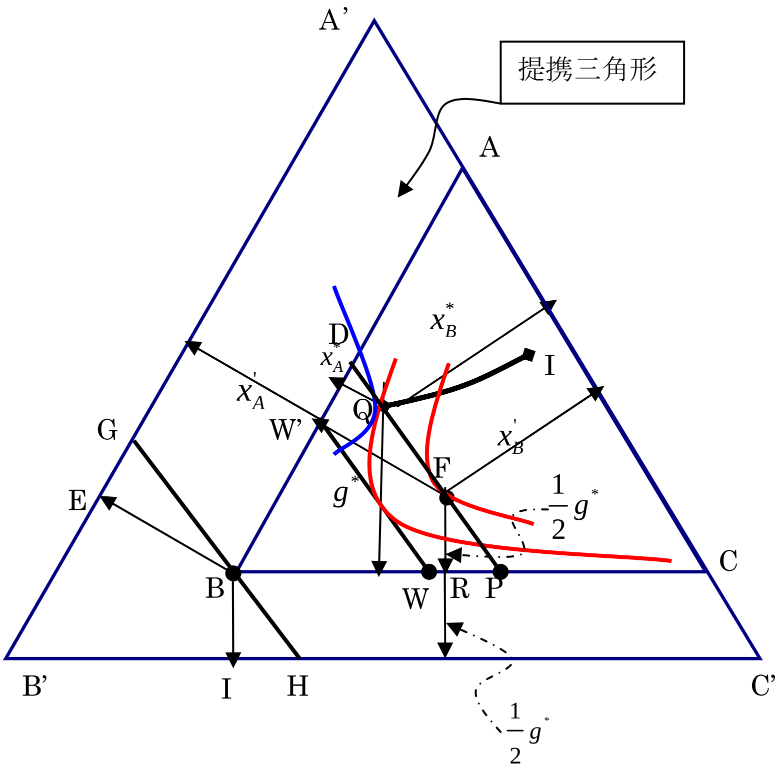

図８

ある。従って点 Q を通る無差別曲線よりも高い満足を与えるタイプ A の無差別曲線が通っている。また、配分点 F ではタイプ B 個人にとって配分点 Q と同じ私的財が配分されている。いま、タイプ A の個人２人とタイプ B の個人一人が提携し、タイプ B の他の一人を除き、自分たちの厚生水準を配分点 Q からタイプ A にとって高い満足を与える配分点 F へ移ることが話し合われているとする。このような３人の提携は点 F における公共財水準を垂直方向に２倍に延長し、同時にタイプ A の点 F での私的財水準を斜辺 AB の垂直方向に２倍に延長することで求められる。このようにして描かれた正三角形を**提携三角形**とよぶことにする。このとき、提携に参加したタイプ B の個人にとって、配分点 F で配分点 Q と同じ公共財水準 g^* と私的財水準 x_B^* が実現している。従って、提携に参加したタイプ B の一人の個人の満足は点 Q とおなじである。ところが、先にも述べたように、タイプ A の２人の個人の満足は点 F の方が点 Q よりも高い。従って、もし配分点 F が２倍複製経済で実行可能であれば、３人が提携することにより、改善された配分点 F へ移動することができるので、基本経済のコア配分点 Q は２倍複製経済では消滅することになる。このような提携計

画は実行可能であろうか？配分点 F が２倍複製経済で実行可能であるためには次の実行条件が満たされねばならない。

$$x'_{A1}+x'_{A2}+x'_{B1}+g^{*}\le w_{A1}+w_{A2}+w_{B1}$$

ここで $w_{A1}+w_{B1}$ は三角形 ABC の底辺の長さに等しい。また提携三角形 A'B'C' の底辺の長さは $x'_{A1}+x'_{A2}+x'_{B1}+g^{*}$ に等しい。従って、次の条件が成立するとき提携計画は実行可能であることが分かる。

提携の実行可能性条件：B'C'≤BC+W'W

ここで、最後の関係は W'W の長さが w_{A2} に等しいことから導かれている。

いま、基本経済の実行可能三角形の頂点 B より３人の提携で構成される提携三角形 A'B'C'の斜辺 A'B'と底辺への垂線の足をそれぞれ点 E、点 I とする。正三角形の性質より、三角形 GBE と三角形 DFW'、さらに三角形 BIH と三角形 FRP はそれぞれ合同となることが分かる。従って GH＝DP が成立している。ここで DP＞W'W から、GH＞W'W となる。GH=B'H と B'C'＝B'H＋HC'＝GH+BC より、B'C'＞BC＋W'W が導かれる。従って、上で述べた３人による提携計画は実行不可能となる。同様の議論はコア配分の任意の点に関して適用可能である。従って、コア配分 QI は２倍複製経済ではそのまま残ることになる。３倍複製経済に関しては、直線 QP 上で $(1/3)g^{*}$ の配分点を考えることにより、同様の議論が適用可能であることが分かる。こうしてｎ倍複製経済に関しても直線 QP 上で $(1/n)g^{*}$ の配分点を考えることによりコア配分点のどの点も消滅しないことを示すことができる。こうして、次の重要な性質が証明された。

（性質４）もし $(g^{*},x_{A}^{*},x_{B}^{*})$ が基本経済Eの任意のコア配分を表すとき、その配分はその経済のｎ回複製経済 E^{n} のコア配分にもなっている[7]。

Foley（1970）は、なぜ公共財を含む場合にコアが縮小しないのかという一般的理由として、次のような点を挙げている。外部性を持つ公共財が存在するとき、提携することはその提携グループ内で公共財を提供しなければならないということを意味している。このことは、提携に参加しなかった個人によって提供されるはずであった公共財の便益を享受できなくなるという費用が生じることを意味している。したがって、個人の数が増えるに従いこの費用が増え、提携の便益が失われてしまうことになる。この結果、個人の数が増えても、いろいろな配分点がコアとして残ることになる。

[7] Nikaido (1976) のページ 78 で証明されている定理である。

４．　リンダール均衡とコア

私的財に関するコア配分の議論では、コア配分は複製経済を繰り返すことにより、競争均衡へ収束することが知られている。しかしながら、３節で示したように、公共財を含む経済では、このようなコアの縮小は起きない。３節で議論されたコア配分を実現する１つの手段として「リンダール均衡」が知られているが、これもコルム三角形を使

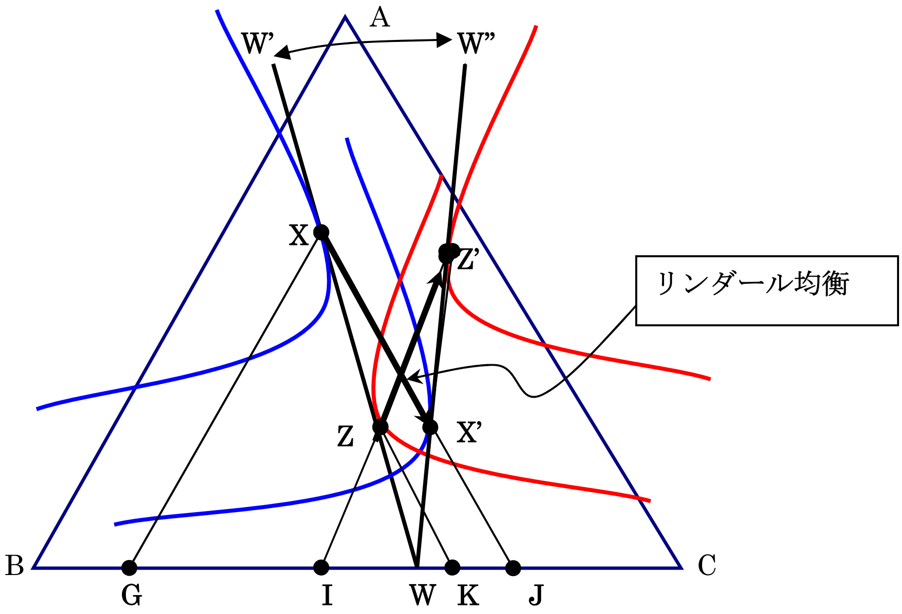

図９

い分析できる[8]。リンダール均衡の基本的な考え方は、ＡとＢの公共財への負担率を政府が告知し、そのもとで両者に最適な公共財水準を申告させる。両者の申告公共財水準が万が一異なる場合、公共財水準を多く申告した人の負担率を引き上げ、少なく申告した人の負担率を引き下げるという調整を行う。こうして、両者の申告公共財水準が一致するときパレート効率な配分が実現する、という手法である。ここで、前節で計算したＡとＢの限界代替率を表す比の合計は１に等しくなっていた。従って、これらの比率 QW/QR と WR/QR を各人の公共財負担率と見なすことができる。これら比率は、初期保有点Wから伸びる共通の予算線の傾きにのみ依存して決まる。言葉を換えて言えば、この直線上の任意の点で決まる公共財水準は、すべて同じ負担率となっている。例えば、W'W上の任意の点Xと点Zでの個人Ａの負担率を計算しよう。点Ｘでの負担率は、GW/GJ であり、点Ｚのそれは、IW/IK である。このとき、三角形WXGと三角形WZIを用いると、IW/GW=IZ/GX が成立している。また正三角形の性質から、GJ=GX と

[8] パレート効率性、コアとリンダール均衡に関する一般的な分析は、古典的文献である Foley (1970) を参照。

IK=IZ が成立しているので、これを先ほどの比に代入すると、IW/GW=IK/GJ となり、GW/GJ=IW/IK が証明される。

いま一定の負担比率が与えられた時、先ほど述べたように、より多くの公共財を好む人の負担比率を引き上げ、他方の人の負担比率を引き下げるように政府が負担比率を調整すると想定する。このような負担率の変更は、コルム三角形上では、点Wから伸びる共通の予算線を、点Wを支点にして、「時計回り」か「反時計回り」に回転させることを意味している。このとき、各個人の負担比率を一種の公共財価格と見なすことができるので、負担率は「**リンダール価格**」と呼ばれている。リンダール価格を使った政府による調整メカニズムにより、両者の申告公共財消費量が一致する状態を見つけることができ、こうして均衡が達成される。この均衡が「**リンダール均衡**」である。この均衡状態は、図５の点Zのような場合しか達成しえない。なぜならば、点Zの場合にのみ、両者の無差別曲線が共通の予算線に接し、かつ、両者の最適公共財水準が一致するからである。このような調整過程を具体的に考えるため、図９には２つのケースが描かれている。共通の予算線がWW'の場合、個人Ｂは点Ｘを選択し、個人Ａは点Ｚを選択する。従って、ＢはＡよりも高い公共財水準を好んでいる[9]。このとき政府は、Ｂの負担比率を高めＡの負担比率を低めるように負担率を調整する。このことは、時計回りに共通の予算線を回転させることを意味している。こうして、新しい共通の予算線がWW"になったとしよう。こんどは、Ｂは点X'を選び、Ａは点Z'を選択する。この場合、ＡがＢよりも高い公共財水準を好むことになる。政府は共通の予算線を、今回は反時計回りへ回転させる。すなわち、Ａの負担比率を上げ、Ｂの負担比率を下げるように調整する。このような両者の負担比率を使った政府による調整過程を通じて、各個人の私的財と公共財の最適配分が変化する。リンダール均衡を一意性に決めるため、Nikaido (1976) に従い各経済主体の効用関数に関して次の仮定を置くことにする。

$$\begin{cases} A1. \quad \text{効用関数 } u_i(g, x_i)\ (i = A, B) \text{ は、通常仮定される凹関数に関する性質をすべて持つ。} \\ \\ A2. \quad \text{どのような正の値 } \alpha \text{ に関しても以下の関係が成立する。} \\ \qquad u_i(g, x_i) \geq u_i(g', x_i') \rightarrow u_i(\alpha g, x_i) \geq u_i(\alpha g', x_i') \end{cases}$$

仮定A2. より、図 1' に描かれているように、予算線が個人Aの初期保有点を支点として変化するとき、個人の最適消費配分は、私的財需要を一定にしたまま、公共財を表す縦軸に平行に変化する[10]。このことは、コルム三角形では、負担率の変化に伴い正三角形の各辺に平行に各個人の最適配分点が移動することを意味している。このことから、図９では、負担率変化に伴う個人Aの最適配分点の動きが、辺ACに平行な直線XX'で、

---

[9] 各均衡点から底辺までの長さが公共財の各個人の最適量を表している。

[10] 詳しくは Nikaido (1976) のページ 81 を参照。

また、個人Bの最適配分点の動きが、辺ABに平行な直線ZZ'で表されている。両直線は、明らかに一回だけ交差する。先の説明から、その交点がリンダール均衡となる。こうして一意なリンダール均衡が得られた。さらに、「リンダール均衡」は、前述の議論から「パレート効率」となる。また、リンダール均衡は孤立経済での均衡ではないので、この均衡は当然「コア」に含まれる。さらに、３節の（性質４）より、ｎ回複製経済でもｎ回複製経済のリンダール均衡ともなっている。

５．　公共財の自発的供給問題と「ナッシュ均衡」

この節では、ナッシュ均衡として公共財が自発的に供給された場合、どのような水準に決まるかを考えよう。ここで考えられている経済環境は、次の状況を想定すれば分かりよい。いま、個人Ａと個人Ｂが家の前の公道の一定範囲をお互いに清掃するとしよう。もちろん、その範囲が完全に清掃されれば、両人にとってもっとも好ましい状態である。このときＡは、Ｂが公道のどれくらいの範囲を清掃するかを予想し、自分の清掃する範囲を決めるとしよう。極端な場合には、Ｂがすべての範囲を清掃してくれると予測し、Ａは一切清掃をしないという場合も考えられる。また、Ｂも、Ａの清掃範囲を予想して自分の清掃範囲を決めるとしよう。このとき、Ｂの清掃範囲に関するＡの予想と、Ａの清掃範囲に関するＢの予想がたまたま一致する時、お互いの予想が実現することになる。このような状態は一種の均衡状態であると見なすことができるので、この均衡概念を初めて定義したJ.ナッシュにちなんで、「**ナッシュ均衡**」と呼ばれている。

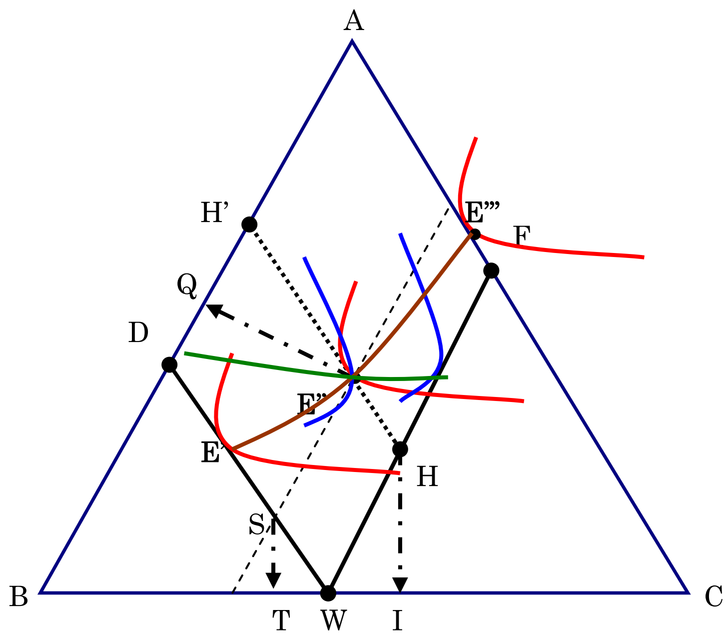

図 10

図 10 には再びコルム三角形が描かれている。議論の単純化のため、個人Ａの行動のみを考えることにしよう。個人Ｂの行動は、Ａの場合と同様に考えることができる。Ａの行動を考える時、ＡはＢの公共財供給量 g_B（Ｂの清掃範囲）を予測し、その予測のもとで、自分の選好が最大となるように、初期保有資源 w_A の制約のもとで私的財の消費量 x_A と公共財の自発的供給量 g_A（個人Ａの清掃範囲）を決める。従って、図 10 のように、リンダール均衡の場合とは違って、各個人は個別の予算線に直面することになる。孤立経済となるので、Ａが個人 A の保有するすべての初期保有資源（w_A）を私的財として消費した場合は、消費点は点Ｗとなり、すべてを公共財に変換した場合は点Ｄとなる。従ってＷＤが個人Ａの予算線となり、点Ｅ'が選択される。同様に個人Ｂは、予算線ＷＦのもとで点 E"を選択する。しかし、ゲーム的状況では、このように個人Ａが決定する (x_A, g_A) は、ＡのＢに対する公共財の自発的供給量予測に依存している。言葉を変えていえば、(x_A, g_A) で表されるコルム三角形上の点が、Ａによる g_B の予測の変化とともに変化する点の軌跡として表されることを意味している。このような点の軌跡は、「**個人Ａの反応曲線**」と呼ばれている。同様にして、(x_B, g_B) は、ＢのＡに対する公共財の自発的供給量 g_A の変化に対する「**個人 B の反応曲線**」としてコルム三角形上に描かれる。

これら反応曲線を実際にコルム三角形上に描くことを試みる。個人Ａだけの行動を考えるため、Ｂに対する予想を、１） $g_B = 0$ 、２） $0 < g_B < w_B$ 、３） $g_B = w_B$ 、の３ケースだけを考えることにする。

ケース１）の場合：Ａのみが公共財を供給するので、もともとの最適点 E'が選択される。

ケース２）の場合： $g_B = HI$ だけＢが公共財を供給するとＡが予測するとしよう。Ｂが $g_B = HI$ だけ自発的に公共財を供給するとＡは想定するので、Ａのもともとの予算線ＤＥは、Ｂの予算線ＦＥに沿って上方へ点Ｈまで平行移動すると。Ａの無差別曲線を描くことにより、新しいＡの最適点が E"となり、最適点がその点へ移動する。このときのＡの私的財消費量は、最適点 E"より辺ＡＢへ下ろした垂線の長さ E"Q で求められる。さらに公共財の自主的供給量は、E"を通るＦＥに平行な線を引き、さらに、その線と元のＡの予算線ＥＤとの交点をＳとした時、点Ｓから底辺への垂線ＳＴの長さで求められる。

ケース３）の場合：ケース２）の場合のように、Ａの予算線ＤＥはさらに EF に沿って移動し、辺ＡＣと一致する。こうして、コルム三角形の辺ＡＣの一部であるＡＦがＡの予算線となる。再びＡの無差別曲線を描くことにより、点 E'"が新しい最適点として選ばれる。

以上から、もし g_B をスムーズに変化させることができれば、E'E"E'"を結ぶ曲線として個人Ａの反応曲線を描くことができる。Ｂに関しても、g_A をスムーズに変化させることができれば、緑色で描かれた曲線をＢの反応曲線として描くことができる。

図 10 では、両反応曲線は点 E”で一度だけ交わっている。この交点でのみ両者の予想が一致するので、点 E”がナッシュ均衡を表す点となる。よく知られているように、公共財が**劣等財**となる場合、二人の反応曲線が 1 度ではなく複数回交わる状況が生じ、**複数のナッシュ均衡解**が存在することになる。

点 E”では、両者の無差別曲線が交わっていることから、ナッシュ均衡がパレート効率でないことを示すことができる。点 E”で予算線 H’H と無差別曲線が接しているので、予算線の傾きの絶対値が限界代替率となる。従って、Aの限界代替率 $(MRS_A(E''))$ は１となる。同様に、Bの限界代替率 $(MRS_B(E''))$ も予算線の傾きの絶対値 1 となる。こうして、

$$MRS_A(E'') + MRS_B(E'') = 2 > 1 = MRT$$

が常に成立する。従って、**公共財の供給量が、パレート最適な供給水準に比べて、ナッシュ均衡では過小になっている。**ナッシュ均衡がパレート効率でないことは、各人の限界代替率が限界変形率に等しくなるので、必ず下記の関係が成立することからも一般的に示すことができる。

$$MRS_A + MRS_B = 2MRT > MRT$$

６． 資源分配の中立性命題

Warr (1983)は、公共財の自立的供給のナッシュ均衡に関して、均衡が個人の初期資源再分配の影響を受けないという意味での「**中立性命題**」を論じた。この中立性命題は、後に Bergstrom,Blume and Varian (1986) や Gradstein, Nitzan and Slutsky (1994) などでさらに一般化されている。２人・２財の我々のモデルでは、コルム三角形を使っ

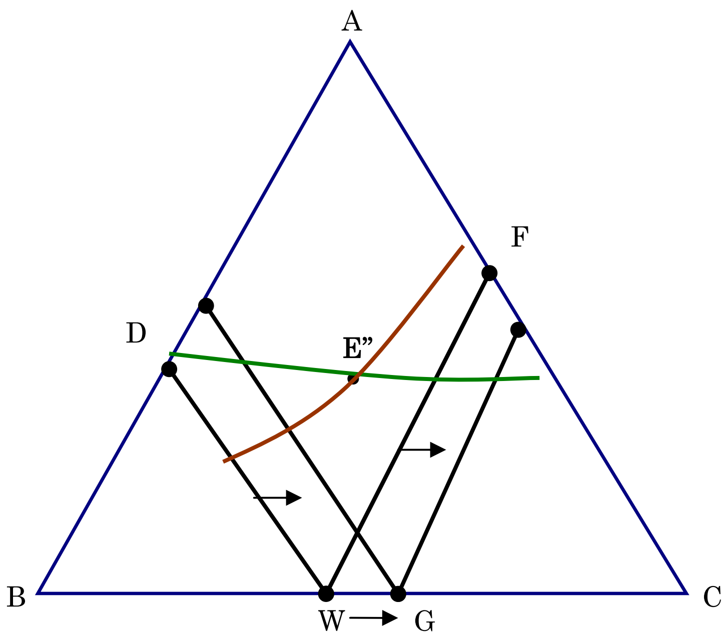

図 11

てこの命題が成立することを直感的に観察できる。再び、図 10 をもとにして描かれた図 11 をみてみよう。この議論に関係のない線はすべて削除され、新しい補助線が引かれている。点Ｗは、ＡとＢの初期資源配分を表している。いま、点Ｗを底辺に沿って点Ｃの方向へ点 Ｇ まで動かす。この移動は、Ａ，Ｂ両個人の間での初期保有量の再分配を意味している。点 Ｗ の移動に伴って、各個人の予算線ＤＥ、ＦＥも平行に移動する。しかしながら、ナッシュ均衡を示す点 E" は移動しない。なぜなら、前述の反応関数の描き方から、反応関数が定義される領域は変化するが、反応関数それ自体は変化しない。こうして、図 11 より、**初期資源の再分配が極端に大きくなければ、Ａ，Ｂの両個人は自分の均衡状態を変更させるインセンティブを持たない。**

７．　「扇形ダイアグラム」との比較

最後に、「コルム三角形」を使う利点を、他の代表的な図による説明と比較しよう。
比較に取り上げる図は、Shibata（1971)や柴田・柴田(1988）などで使われている「扇形ダイアグラム」と呼ばれている図 12 である。

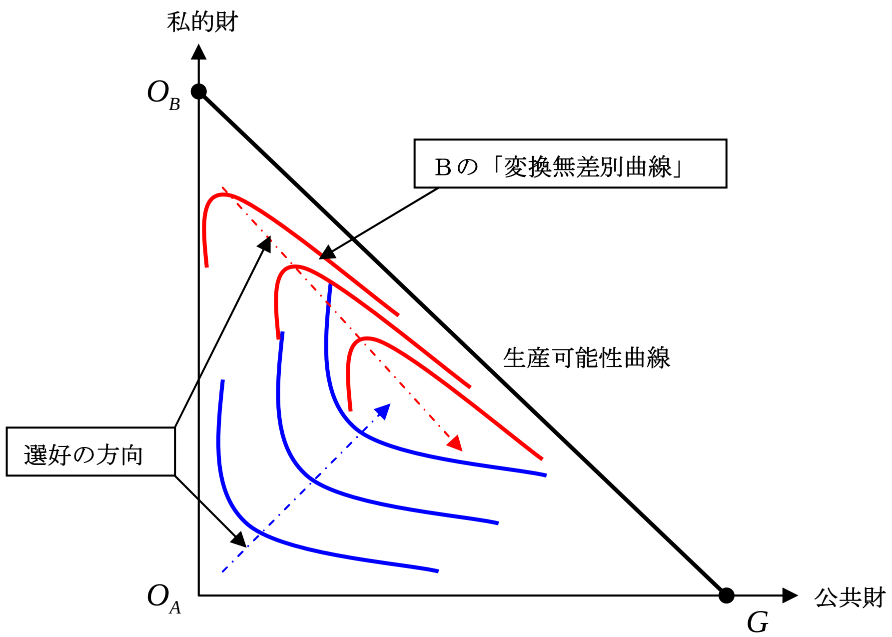

図 12

通常の作図と同様、横軸に公共財を、縦軸に私的財を測る。本稿の想定と同様、限界変形率が 1 に固定されていると想定する。このとき、この図に生産可能性曲線を傾き（-1）の直線 O_BG として描くことができる。さらに軸の原点 O_A から縦軸方向に、Ａの私的

財の消費量を測る。こうして、三角形 $O_B O_A G$ 上に通常のＡの無差別曲線を図９のように描くことができる。生産可能性曲線が縦軸と交わる切片を表す点 O_B は、ＡとＢの消費可能な合計を表すので、この点から個人Ｂの私的財の消費量を縦軸に沿って測ることができる。さらに、Ｂの選好を O_B から斜辺の方向（生産可能性曲線の傾き）に沿って測ることにより、Ｂの通常の無差別曲線とは異なる「**変換無差別曲線**」（柴田・柴田(1988),pp.64-67 を参照）を描くことができる。通常の無差別曲線との違いは、「変換無差別曲線」の限界代替率は、通常のＢの無差別曲線の限界代替率 MRS_B から生産可能性曲線の限界変形率 MRT を引いたものになっていることである。このように、Ｂに関しては、描かれた無差別曲線の意味が通常の意味とは違ってしまうという欠点がある。反対に、この図の利点として、生産可能性曲線が曲線となる一般的な場合へも容易に拡張できることが挙げられる。この点に関して、コルム三角形は、その作図方法に関する制約により、生産可能性曲線が曲線となる場合は描くことができない。それにも関わらず、コルムの三角形は、通常の意味での無差別曲線を想定することができるという強い利点を持っている。このため、３節と４節で議論したように、パレート効率性、コアとリンダール均衡などの重要なテーマを、平面図を使い統一的に説明できた。さらに、三角形の比率のみを使って公共財に関する重要な議論を直感的に行うことができるという大きな利点も持ち合わせている。

８．　まとめ

本稿では、Kolm (1970) により考案された図、コルム三角形を使うことにより、２人・2 財モデルでの公共財を含む場合の資源配分問題が直感的に分析された。「コルム三角形」を使った説明は、私的財と公共財の生産可能性曲線が直線になる、という強い仮定に依存している。それにも関わらず、財を特殊な座標系（重心座標系）で測ることにより、通常の無差別曲線の概念を保持したままで、私的財のみの資源配分問題を考えるエッジワース・ボックス図と同様、公共財を含む資源配分問題の核心部分を議論するのに便利な図であると結論できる。

参考文献

英語文献

Bergstrom,T., L. Blume and H. Varian (1986),"On the Private Provision of Public Goods," *Journal of Public Economics 29*, 25-49.

Cornes, R. and T. Sandler (1985),"The Simple Analysis of Public Good Provision," *Economica 52,*103-116.

Cornes, R. and T. Sandler (1986), *The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods* (London, Cambridge University Press).

Foley, D. K. (1970),"Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods," *Econometrica 38,* pp.66-72.

Gradstein, M., S. Nitzan and S. Slustky (1994),"Neutrality and the Private Provision of Public Goods with Incomplete Information," *Economics Letters 46*, 69-75.

Kolm, S.-C. (1970) *La Valeur Publique* (Paris, Dunod)

Laffont,J-J. (1987) *Fundamentals of Public Economics* (Cambridge,Mass., MIT Press).

Ley, E. (1996),"On the Private Provision of Public Goods: A Diagrammatic Exposition," *Investigaciones Economicas, 20:1*, 105-123.

Nikaido, F. (1976),"The Core of a Large Economy with Public Expenditures: A Diagrammatical Analysis," *Zeitschrift für Nationalökonomie 36*, pp.73-84.

Samuelson,P.(1955),"A Diagrammatic Exposition of a Theory of pure Expenditure," *Review of Economics and Statistics, 37*, 350-356.

Shibata, H. (1971),"A Bargaining Model of the Pure Public Expenditure," *Journal of Political Economy, 79*, 1-29.

Thomson, W. (1999),"Economies with Public Goods: An Elementary Treatment," *Journal f Public Economic Theory, 1,* 139-176.

Warr, P. (1992),"The private Provision of a Public Good is Independent of the Distribution of Income," *Economics Letters, 13*, 207-211.

日本語文献

奥野正寛・鈴村興太郎(1988)『ミクロ経済学 II』(岩波書店)

西條辰義(2000)『レクチャノート：厚生経済学』(非出版講義ノート)

柴田弘文・柴田愛子(1988)『公共経済学』(東洋経済新報社)

田平正典(2003)『地方公共支出の最適配分』(多賀出版)