投資理論の確率動学モデル

増山　幸一
明治学院大学経済学部

Discussion Paper 08-01

2008 年 4 月

1 始めに

家計の金融資産選択行動ならびに企業の実物投資行動を的確にモデル化することは、マクロ経済の動学理論および企業行動の理論を構築するうえで、極めて重要な役割を担っている．周知の通り、企業の投資行動およびマクロ的な投資理論の伝統的な静学理論では、資本の限界収益と資本のユーザー・コストとが一致するように投資が決定されると想定されてきた．この静学的なモデルでは、企業は費用をかけずに瞬時のうちに資本ストックが調整可能であると仮定されている．しかし、資本ストックを調整する際には調整費用が発生するという認識が重要視されるならば、そして、収益の将来予想が現在の投資に影響を与えるという想定が現実性をもたらすならば、投資行動は動学的な枠組みの中で定式化されなければならない．こうした問題意識を受けて、投資の調整費用を明示的にモデルに導入した投資の動学理論に関する研究が進展した．1970 年代から 1980 年代始めにかけて、調整費用を組み込んだ投資理論はトービンの q 概念を拡張する方向に研究が進展した．トービンは、投資の最適な水準は資本の置換費用に対する企業の価値の比率 q の増加関数であると指摘した．これが平均 q である．その後の林 (1982) などの研究で、ある条件の下では、平均 q が限界 q に一致することが証明された．この段階での研究では、将来収益の不確実性をモデルに取り込むという問題意識は背後に放置されてきた.[1]

収益の将来実現値を正確に予想することは難しく、企業行動を取り巻く将来環境の予想には不確実性やリスクが伴う．企業の投資行動に伴う不確実性問題を重要視するならば、将来の経済環境は確率過程として定式化される必要がある。1980 年代以降、不確実性を確率過程として定式化して、企業の投資行動を確率動学的なモデルに基づいて分析する研究が進展してきた．80 年代の代表的な研究は Pindyck(1982) および Abel(1983, 85) などであり、Abel and Eberly(1994, 96, 99) は Abel の定式化をさらに精緻化し、より一般的なモデルを用いて企業の投資行動を分析している．

他方で、Arrow(1968 年) の指摘以降、モデル分析上で、企業の投資行動における投資の不可逆性の問題が重要視されつつあった．投資の不可逆性が投資行動にいかなる効果を与えるかという論点が研究対象になった．投資の不可逆性とは、企業がある投資を実行した後、その投資を取り消して、投資がなかった状態に戻すことはできないことをいう．いったん据え付けられた資本設備は企業固有のものであり、あるいは産業固有のものであり、他の産業等に転用することは困難である．投資が不可逆的であるとは、建設した資本設備を中古市場で売却できない場合に相当する．中古市場で安く売却できる場合には、部分的不可逆性といわれている．1990 年代には、この不可逆性が企業の投資行動にどのような効果を与えるかを巡って多くの議論がなされた．Bernanke(1983)、Bertola and Caballero(1994) および Abel and Eberly(1996) などが代表的な研究成果である．

投資が不可逆的であるとき、あるいは、部分的に不可逆的なとき、投資の実行を遅延することの方が望ましい場合が起こりうる．いつの時点で投資を実行するかという問題は企業にとって本質的な意思決定問題となる．いつの時点で投資を実行するかという問題の立て方は、金融資産市場の研究で分析されているオプションの価格付け問題と本質的には同一の問題である．投資を将来に延期することは、コール・オプションを購入することと同じことである．資本財を将来売却することはプット・オプションを保有することに等しい．投資が不可逆的であるならば、プット・オプションの価値はゼロとなり、将来に投資を拡大できないならばコール・オプションの価値はゼロとなる．実物資本への投資行動は、金融資産のオプション取引にアナロジーして、リアル・オプションの問題として定式化されるようになった．投資行動に関するリアル・オプションの初期の研究は Brennan and Schwartz(1985)、McDonald and Siegel(1985, 86) が代表的であ

[1] 金融経済学の領域では、Merton(1969,71) の研究に見られるとおり、不確実性を確率過程モデルで定式化してモデル分析を行なう方法論は 1960 年代末から急速に進展していた．その一方で、マクロ経済学での研究では、経済環境の不確実性を連続時間確率過程として明示的に定式化して、動学分析を行なう理論的な展開は遅れていた．不確実性をモデルに導入して投資理論を展開した研究の代表例として、Lucas and Prescott(1971) および Hartman(1972) をあげることができる．

り、Pindyck(1991) で文献のサーベイがなされている．リアル・オプションアプローチの統一的な定式化は Dixit and Pindyck(1994) にまとめられている.[2]

このように投資理論の動学モデルは、1970 年代以降現在まで、数学的にも精緻化され、分析枠組みも変貌を遂げつつ進展してきた．本稿では、投資理論の現段階での到達点を統一的なモデルに基づいて説明することを試みる．統一的な動学モデルでは、数学的な手法としては、連続時間の確率過程モデルを前提として、将来の経済環境の変化を拡散過程の確率微分方程式によって定式化する手法を用いる．第 2 節で、実物資本への投資行動を確率動学モデルを用いて説明する．企業の投資行動は、投資が生み出す将来利潤の現在価値を最大化するように決定されると想定し、経済環境の変動を確率微分方程式によって定式化する．第 3 節で、投資が不可逆的であるとき、投資の最適タイミング問題を取り上げる．投資タイミングの決定行動をリアル・オプション問題として定式化する．第 4 節で金融資産市場での投資行動を取り上げる．資産価格が幾何ブラウン運動に従うことを前提として、金融資産の運用・投資問題を確率動学モデルとして定式化する．このモデルは Black-Scholes-Merton モデルと呼ばれているものである．Black-Scholes-Merton モデルの枠組み内で、金融資産市場における投資理論の諸問題をどこまで解決できたのかについて、論点を整理し、その成果を展望する.[3]　なお、Appendix で、確率的最適制御問題の解法に熟知していない読者のために、伊藤の公式および動的計画法の解法に必要なハミルトン-ヤコビの方程式 (ベルマン方程式) の導出方法を簡単に説明している.

2　企業の実物資本への投資行動

企業が将来利潤を獲得することを目指して投資を行なうとき、将来利益に影響する経済的環境に関する不確実性あるいはリスクに直面する．将来の不確実性が増加すると予想されるとき、企業の投資水準はどのような影響を受けるのかという疑問に答える必要がある．企業がリスク回避的であるならば、不確実性の増大は投資水準を引き下げる方向に作用するだろうと容易に理解できる．しかし、企業がリスク中立的であるとき、不確実性の増大は投資水準を引き下げるのだろうか．この問題を解明するために、企業の投資行動の最適化確率モデルが定式化されてきた.[4]　これらの研究によれば、企業がリスク中立的であるとき、市場が完全競争市場であれば、不確実性の増大は企業の投資水準を上昇させる．市場が不完全競争市場であるときには、不確実性の増大は企業の投資水準を引き下げる可能性がある．この結論は、投資行動が不可逆的であっても、投資の総費用関数が非対称的であっても、成立する．また、投資がゼロであるとき、投資の総費用関数がゼロではなく、正の値をとるならば、投資行動が Ss タイプのトリガー政策となることが分かる．ここで、投資行動のモデルを定式化して、この結論を導出することにする．

資本と可変的な生産要素 (例えば、労働など) を用いて保存不可な生産物を生産する企業を考える．各時点で企業は可変的な生産要素の投入量を調整して、収入マイナス可変的費用から計算される営業利潤を最大化する．時刻 t での営業利潤を $\pi(K(t), X(t))$ とする．$K(t)$ は時刻 t での資本の大きさ、$X(t)$ は生産性へのショック、あるいは可変的要素の価格の変動分、または生産物に対する需要のショックなどのような確率変動を表現する変数である．ここで、$\pi_K > 0, \quad \pi_{KK} \leq 0, \quad \pi_X > 0$ と仮定する．確率変数 X は以下の確率微分方程式に従う．

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dw$$

[2] トービンの q とオプションの価値との間の関係については、Abel, et al.(1996) や Eberly(2007) を参照のこと．

[3] 本稿では、条件付請求権に対する複製ポートフォリオ作成方法に基づく、オプションの価値を支配する偏微分方程式 (Black-Scholes-Merton 方程式) を導出する手法については触れない．なお、Sundaresan(2000) は、2000 年時点で、ファイナンス理論における Black-Scholes-Merton モデルに基づく研究成果のサーベイを行なっている．

[4] Andrew B. Abel(1983, 85),Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(1994, 99),Caballero(1991), Pindyck(1982, 93) などを参照してください．

ここで、w は標準ブラウン運動である．粗投資を I とすると、資本ストックは

$$dK(t) = (I(t) - \delta K(t))dt$$

で蓄積する．ただし、δ は減価償却率で、一定であるとする．企業が新しい投資を行なうとき、投資の調整費用が発生する．この調整費用は３つの要因に起因する．第１に、資本財の直接的な購入費用あるいは売却費用が必要となる．第２に、資本設備を拡大あるいは縮小することに関わる調整費用が発生する．第３に、投資がなされないときにも、設備を維持するためのメインテナンス費用が必要である．これらの総費用、投資の総費用関数を $c(I,K)$ で表現する．投資の総費用関数 $c(I,K)$ は、I に関して厳密に凸であると仮定する．関数の非対称性を許すので、$I=0$ で連続であるが、屈折している場合もある．右側微分値は左側微分値よりも大きいとする．つまり、

$$\lim_{h\to 0} c_I(0+h,K) \geq \lim_{h\to 0} c_I(0-h,K), \quad h>0$$

と仮定する．企業はリスク中立的で、営業利潤 $\pi(K,X)$ マイナス投資の総費用 $c(I,K)$ を最大化する．よって、企業の価値 V は

$$V(K(s),X(s)) = \max_I E_s[\int_0^\infty \{\pi(K(t+s),X(t+s)) - c(I(t+s),K(t+s))\}e^{\rho t}dt] \tag{1}$$

ここで、E_s は時刻 s における情報の下での条件付期待値を表現し、$\rho>0$ は割引率である．動的計画法の基本方程式 (18) を適用すると、

$$\rho V(K,X) = \max_I \{\pi(K,X) - c(I,K) + \frac{1}{dt}E_s dV\} \tag{2}$$

が得られる．左辺は企業に要求される収益率であり、右辺は最大化された収益率である．最大化された収益率は営業利潤マイナス投資の総費用＝準利益と企業価値のキャピタルゲイン $(1/dt)EdV$ からなる．伊藤の公式を適用すると、ハミルトン-ヤコビの方程式

$$V_s + \max_I[\mathcal{L}(s)V + \pi(K,X) - c(I,K)] = \rho V(K,X)$$

が成立する．$V_s=0$ だから、

$$\max[\pi(K,X) - c(I,K) + (I-\delta K)V_K + \mu(X)V_X + \frac{1}{2}(\sigma(X)^2 V_{XX}] = \rho V(K,X) \tag{3}$$

となる．f_x は変数 x による f の偏微分、f_{xx} は変数 x による f の 2 階偏微分を表す．資本の限界価値 q は企業の価値 V を資本で偏微分した大きさに等しいので、$q=V_K$ とおける．最適な投資額 I^* は

$$(I-\delta K)q - c(I,K)$$

を最大化する I である．明らかに、最適投資は q と K に依存する．だから、$I^*=I^*(q,K)$ と表現できる．単純な１階の条件は $c_I(I^*,K)=q$ となるが、投資がゼロのとき投資の総費用関数が微分可能ではない場合、特別な注意が必要である．例えば、$I=0$ での右側微分係数 $c_I(0,K)^+$ と左側微分係数 $c_I(0,K)^-$ との値が異なり、

$$c_I(0,K)^+ > c_I(0,K)^-$$

となるケースを考えてみる．ただし、投資の総費用関数は厳密に凸関数であるとする．この場合、資本の限界価値 q が $c_I(0,K)^+ \geq q \geq c_I(0,K)^-$ の範囲にあるとき、投資額はゼロとなる．それ以外のとき、

$q = c_I(I^*, K)$ が成立している．つまり、資本の限界価値が投資の限界費用と一致するように投資が決まる．最適な投資を一般的に表現すると、

$$
\begin{aligned}
c_I(I^*, K) &= q, \quad q < c_I(0,K)^- \text{または} q > c_I(0,K)^+ \text{のとき}, \\
I^* &= 0, \quad c_I(0,K)^+ \geq q \geq c_I(0,K)^- \text{のとき},
\end{aligned}
$$

である．$q > c_I(0,K)^+$ のときは、粗投資は正であるが、$q < c_I(0,K)^-$ のときは祖投資は負、つまり資本設備を売却する．q が $c_I(0,K)^+ \geq q \geq c_I(0,K)^-$ の範囲に収まる場合には、投資は行なわれない．投資の総費用関数が原点で屈折している場合、投資政策は、あきらかに、Ss タイプのトリガー戦略となる.[5]　また、投資の総費用関数 $c(I,K)$ は厳密に凸なので（$c_{II} > 0$ なので)、$q > c_I(0,K)^+$ が成立しているならば、q が増大すれば投資水準は上昇する．投資と q は正に相関する．

　不確実性の増大が投資水準にどのような効果を与えるかを解明するためには、q の具体的な関数形を求める必要がある．式 (3) を K で微分すると、

$$
\pi_K(K,X) - c_K(I^*,K) - \delta q + q_K(I^* - \delta K) + \mu(X)V_{XK} + \frac{1}{2}\sigma(X)^2 V_{XXK} = \rho V_K \tag{4}
$$

が得られる．$q = V_K$ は K と X の関数であるので、伊藤の公式から、

$$
E_t[dq] = q_K(I^* - \delta K)dt + \mu(X)V_{XK}dt + \frac{1}{2}\sigma(X)^2 V_{XXK}dt
$$

という関係が導出できる．上式を式 (4) に代入すると、

$$
\frac{E_t[dq]}{dt} + \pi_K(K,X) - c_K(I^*,K) = (\rho + \delta)q \tag{5}
$$

が得られる．左辺の第１項はキャピタルゲイン、第２項は資本の限界収益、第３項は投資の限界費用となっている．だから、左辺は資本の期待収益率であり、右辺は資本の貸与に課された粗収益率に他ならない．q を

$$
q(t) = E_t\left[\int_0^\infty \{\pi_K(K(t+s), X(t+s)) - c_K(I(t+s), K(t+s))\} e^{-(\rho+\delta)s} ds\right] \tag{6}
$$

と想定して、この表現が式 (5) を満たすことは容易に証明できる.[6]　つまり、(6) が式 (4) の解である．利潤関数 $\pi(K,X)$ と投資の総費用関数 $c(I,K)$ の内容を具体的に特定化しないと、q の解析的な表現が可能とならない．

　最初に、完全競争市場のもとでの投資行動を考察する．企業の生産関数は資本 K と労働 L の一次同次関数 $F(K,L) = K^{1-\alpha}L^\alpha$ であるとする．α は労働分配率である．確率変数 X を価格変数 p とし、単純化のために価格 p は以下の確率微分方程式

$$
dp(t) = \sigma p(t) dw
$$

に従うと仮定する．企業の営業利潤 π は

$$
\pi(K(t), p(t)) = \max_L E_t[p(t)K(t)^{1-\alpha}L^\alpha - zL]
$$

と表現される．ここで、z は賃金率である．最大化の計算を実行すると、

$$
\pi(K,p) = hp^\beta K
$$

[5] 投資が不可逆的であるときの投資政策に対するより詳細な分析は Bertola and Caballero(1994) および Abel and Eberly(1996,99) を参照してください.

[6] ファインマン-カッツの公式を適用すれば、この計算式が成立することは容易に理解できる．ファインマン-カッツの公式の詳細については、Karatzas and Shreve(1991), 366-367 を参照してください.

となる．ただし、

$$h = (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} z^{-\alpha/(1-\alpha)} > 0,\ \beta = \frac{1}{1-\alpha} > 1$$

である．投資の総費用関数が資本ストックに比例する簡単なケースを考える.[7]

$$c(I,K) = \begin{cases} aK + b_1 I + \eta_1 I^{\gamma}, & I > 0 \text{ の場合} \\ aK + b_2 I + \eta_2 |I|^{\gamma}, & I < 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

ただし、$a > 0,\ b_1 > b_2 > 0,\ \gamma \geq 1,\ \eta_1, \eta_2 \geq 0$ である．このとき、$c_K = a$ なので、q は

$$q(t) = E_t[\int_0^{\infty} \{hp(t+s)^{\beta} - a\} e^{-(\rho+\delta)s} ds]$$

で計算される．価格の変動の平均値と分散は、

$$E_t[\ln p(t+s)] = \ln p(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 s,\ Var_t[\ln p(t+s)] = \frac{1}{2}\sigma^2 s$$

となることが分かる．よって、

$$E_t[\ln p(t+s)^{\beta}] = \beta\{\ln p(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 s\};\ Var_t[\ln p(t+s)^{\beta}] = \beta^2 Var_t[\ln p(t+s)]$$

である。

$$E_t[p(t+s)^{\beta}] = \exp[E_t \ln p(t+s)^{\beta} + \frac{1}{2} Var_t\{\ln p(t+s)^{\beta}\}]$$

なので、

$$E_t[p(t+s)^{\beta}] = p(t)^{\beta} \exp[\frac{1}{2}\beta(\beta-1)\sigma^2 s]$$

が成立する．従って、q の値は

$$q(t) = \frac{hp(t)^{\beta}}{\rho + \delta - \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\sigma^2} - (\rho+\delta)a \tag{7}$$

となる．不確実性の大きさは σ の大きさで代理できるので、不確実性が上昇することは σ が増加することを意味する．式 (7) から、明らかに、σ の増大は q の値を上昇させる．それ故、不確実性の上昇は投資水準を増加させる方向に作用する．割引率 ρ は利子率と連動しているので、利子率の上昇は q を減少させる、従って、投資を低下させる方向に作用する．減価償却率の変化は利子率と同じ効果をもたらす．この結論は、資本の限界収益生産物 (marginal revenue product of capital) が資本ストックの線形関数で、価格の凸関数となっていることから導出されている．ジェンセンの公式より、価格変動の分散が増加すれば、資本の限界収益生産物の期待値の値は上昇する．資本の限界収益生産物が価格の凸関数になるのは、生産関数が労働と資本の一次同次関数であることと、市場が完全競争市場であることを仮定しているからである．財市場が不完全競争市場であるケースでは、あるいは、ある種の収穫逓減が働くようなケースでは、資本の限界収益生産物は資本ストックの凹関数となる．もし資本の限界収益生産物が価格と賃金の凹関数ならば、不確実性の増加は投資水準を低下させる可能性をもたらす．Leahy and Whited(1996) による実証分析の結果によれば、不確実性の増大は投資水準を減少させることが観察されている．従って、資本の限界収益生産物が価格と賃金の凹関数になっている可能性が大きいと指摘できる.[8].

[7] この関数形は Caballero(1991) を拡張した形をしている．aK は固定費用と理解する．

[8] CAPM によれば、投資に対する要求収益率は投資の不確実性に正に相関しており、投資プロジェクトの β 値が大きくなれば投資に対する要求収益率が増大し、投資水準は低下する．Leahy and Whited(1996) の研究は CAPM が主張するような経路で投資が低下する事実は発見できないと指摘している．また、Abel and Eberly(2002) も類似の実証分析を行なっているが、不確実性の効果に関して、この実証結果を覆すような結論は得ていない．

上で用いた投資の総費用関数によれば、

$$c_I(I,K) = \begin{cases} b_1 + \eta_1\gamma I^{\gamma-1} = q, & q > b_1\text{の場合} \\ b_2 - \eta_2\gamma(-I)^{\gamma-1} = q, & q < b_2\text{の場合} \end{cases}$$

となっている．トービンの q の値が $b_2 < q < b_1$ の範囲では、投資はゼロとなっている．明らかに、企業の投資政策が Ss タイプの政策となるので、投資水準はトービンの q の変化に必ずしも一対一に反応して変化しない．Caballero and Leahy(1996) が指摘したように、投資に固定費用が必要とされる理論モデルでは、投資が限界 q の単調増加関数とはならない．このように、投資が (部分的に) 非可逆的であるとき企業の投資政策は非線形の Ss タイプのトリガー戦略となる．この理論モデルの予測は現実の企業行動のデータとも整合的であり、根拠付けられている．Caballero and Engel(1999) は、米国製造業に見られる投資変動の特徴を十全に説明するためには非線形の Ss タイプのトリガー戦略を持つ個別企業の理論モデルが有効であると主張している．

3 リアル・オプションズ

前節での議論では、投資が不可逆的である、あるいは、部分的に不可逆的であるとき、資本ストックの調整には費用がかかる場合、企業の投資行動がどのような特徴を持っているのかについて、投資の調整費用モデルを用いて説明してきた．このモデルでは、投資プロジェクトの大きさが無限小に分割できることを想定し、無限種類の連続的な投資プロジェクトがあたかも存在するかのごとく取り扱ってきた．現実の企業投資では、各企業が抱える投資プロジェクトは少数の種類のものであり、各投資プロジェクトをどのような順序で、あるいは、どれを優先的に実行するかなどの意思決定がなされる．現実の経済活動では、投資の実行を先延ばしした方が望ましいケースや、より詳細な情報が入手できる将来時点で資本増強を計画する方がより大きな収益をもたらすようなケースが見られる．新しい情報あるいはある種の情報が入手できる将来時点まで、投資プロジェクトの実行を遅延することは、投資プロジェクトというコール・オプションを保有することと等価である．投資プロジェクトの実行時期が制限されない場合は、このコール・オプションの満期は無限遠方となる．投資行動のリアル・オプション・モデルを定式化する前に、投資プロジェクトの実行を遅らせる方がより大きな収益をもたらす理由を簡単な数値例を用いて説明する．[9]

ある企業の生産物の今期価格は 100 万円、来期以降の価格は不確実である．来期以降、確率 p で 150 万円、確率 $1-p$ で 50 万円となることが知られている．企業は 10 %の割引率で将来のキャッシュフローの現在価値を計算する．投資を実行するための費用が 800 万円で、$p = 0.5$ とする．このとき、来期以降の価格の平均値は 100 万円となる．企業はリスク中立的であるとする．投資の正味現在価値 (の期待値) は、今期に投資を実行するとき、

$$NPV = -800 + \sum_{t=0} \frac{100}{(1.1)^t} = -800 + 1100 = 300$$

となる．通常の NPV ルールでは、正味現在価値が正となるので、投資は実行すべきという結論が得られる．投資を一期遅らせ、生産物価格が 150 万円に上昇したことを観察したときのみ、投資を実行する．このとき、投資の正味現在価値 (の期待値) は

$$NPV = 0.5[-\frac{800}{1.1} + \sum_{t=1} \frac{100}{(1.1)^t}] = 386$$

[9] この数値例は Pindyck(1991) に依拠している．

と計算される．このときの正味現在価値は、投資を今期に実行するときの正味現在価値よりも大きい．よって、投資を一期遅らせるほうがより望ましい．投資を一期遅らせることの価値、言い換えると、投資を遅らせることが出来る柔軟性を保有することの価値は $386 - 300 = 86$ 万円ということになる．投資プロジェクトをコール・オプションとして保有するとき、このコール・オプションの価値は 86 万円であると理解できる．投資が今期に実行されるならば、86 万の機会費用が失われるということになる．今期の投資の価値計算を正確に行なうためには、この機会費用が計算の中に含まれていなければならない．

金融資産のコール・オプションでは、よく知られているように、将来の不確実性が増大すると、コール・オプションの価値は上昇する．この理由は、不確実性が増大することは将来利益が大きくなる可能性を増加させ、将来オプションの実行から得られる収益が正以上のときにのみオプションが実行され、それ以外の時には実行されないからである．これと同じメカニズムが作用して、投資プロジェクトをコール・オプションとして保有するとき、将来の不確実性が増大するならばこのコール・オプションの価値も上昇する．

Trigeorgis(1996) はリアル・オプションを以下のような 7 つのカテゴリーに分類している．最も頻繁に見られるシンプルな代表的な例は、工場を建設するような投資プロジェクトあるいは新規市場に参入する投資計画の実施を遅らせる事例に見られるオプション (Option to defer investment) である．複数の投資プロジェクトを段階的に実施して初めて投資プロジェクト全体が完成するような例に見られるオプション (Time-to-build option) は現実の投資計画で頻繁に直面する事例である．また、工場の操業水準を拡大したり、縮小したり、あるいは操業を停止したりというオプション (Option to alter operating scale) も工場を建設した後に頻繁に直面する意思決定問題である．時には、工場そのものあるいは企業の 1 部門を売却するオプション (option to abandon) を採用するケースも起こってくる．製品への需要が急激に変化したり、購入資材の価格が乱高下するようなケースでは、生産する製品の種類を変化させたり、投入資材を他の材料に代替させるというようなオプション (Option to switch) が取り得る．ハイテク産業における R&D 投資に見られるように、新製品開発や新技術開発を実現するに際しては研究開発での初期投資が重要となり、この初期投資が実行されて始めて次の R&D 段階にステップアップできる．こうした事例に見られるオプションは、将来の企業成長を実現するために必要な多段階オプションの連鎖からなるので、成長オプション (Growth option) と呼ばれている． 最後のカテゴリーは、多重相互依存オプション (Multiple interacting options) と呼ばれているものである．現実の企業活動は様々なオプションの集合体から成り立っている．しかし、複合的なオプションの価値は各オプションの価値の単純な総和よりも大きな価値をもたらす．しかも多くのリアル・オプションは企業内の財務政策とも相互依存している．

リアル・オプションズ・アプローチのエッセンスを理解するために、最も簡単な投資プロジェクトのリアル・オプション・モデル、option to defer investment モデルを Dixit and Pindyck(1994) に依拠して定式化する．従って、ここでは、工場建設後に直面する操業水準変更のオプション (Option to alter operating scale) などを無視する.[10] 簡単のために 1 単位の生産物を生産する工場の建設プロジェクトを考える． 1 単位の生産物を生産することが出来る工場を建設するためには、投資額 K が必要であるとする。ここでの問題は、何時、この投資を実行すべきかに答えることである．生産物の価格を p と表記する．生産物の価格は以下の確率微分方程式に従うことが分かっている．

$$dp = \alpha p dt + \sigma p dw.$$

ここで、α は成長パラメター、σ は分散パラメターである．議論を簡単化するために、可変費用はゼロであるとすると、粗利潤 π は $\pi = p$ である．建設投資が実行されたとき、時刻 t での利潤 $\pi(t) = p(t)$ は

$$d\pi = \alpha \pi dt + \sigma \pi dw.$$

[10] 操業停止オプションの分析については MacDonald and Siegel(1985) を、鉱物資源開発における操業停止と操業再開を含めた投資プロジェクトの分析に関しては Brennan and Schwartz(1985) を参照してください．

に従う．粗利潤 $\pi(t)$ の期待値は

$$E_{t_0}[\pi(t)] = \pi(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$$

となる．E_{t_0} は時刻 t_0 における情報の下での条件付期待値を意味する．建設された工場の価値 v は、時刻 t の現在価値で、

$$v(t,\pi(t)) = \int_t^\infty \pi(t)e^{-\rho(s-t)}ds = \frac{\pi(t)}{\rho-\alpha}$$

と与えられる．従って、時刻 t で投資が実行されたときの収益は $v(t)$ であり、現在価値は $v(t)e^{-\rho t}$ である．それゆえ、直面する問題は、期待利潤の現在価値

$$E_{t_0}[(v(T)-K)e^{-\rho T}]$$

が最大になるような投資の実行時期 T を求めることである．政策変数は投資の実行時期 T である．最適化問題の目的関数は

$$J(t_0,\pi_0,T) = E_{t_0}[(v(T)-K)e^{-\rho T}]$$

である．価値関数 W を

$$W(s,y) = \max_T E_{s,y}[(v(T)-K)e^{-\rho T}]$$

と定義すると、動的計画法のハミルトン-ヤコビの方程式は

$$\rho V = V_s + \max_T[\frac{1}{2}(\sigma y)^2 V_{yy} + \alpha y V_y] \tag{8}$$

となる．ここで、$W(s,y) = V(s,y)e^{-\rho s}$ である．境界条件は

$$V(T,y) = v(T) - K = \frac{y}{\rho-\alpha} - K$$

および

$$V(s,0) = 0$$

である．Dixit and Pidyck(1994) が提案する追加的な境界条件 (平滑接続の条件と言われる) が満たされるとする．

$$V_y(T,y) = \frac{1}{\rho-\alpha}$$

を仮定する.[11]　解が存在するためには、言い換えると、期待収益が有限にとどまるためには、$\rho > \alpha$ を仮定する必要がある．

　最適化問題の解、つまり、最適な投資実行の時期を T^* と表記し、そのときの祖利潤を $\pi(T^*) = \pi^*$ とする．価値関数を

$$V(s,y) = g(s)y^\beta$$

と仮定すると、(8) 式は

$$g'(s) + \{\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho\}g(s) = 0$$

となる．β が

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

[11]価値関数が満たすべき境界条件についての説明は Dixit and Pindyck(1994) を参照してください．

を満たすように決定されるならば、$g'(s)=0$ である．この 2 次方程式の解は

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{[\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}]^2 + 2\frac{\rho}{\sigma^2}} \quad > 1$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} - \sqrt{[\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}]^2 + 2\frac{\rho}{\sigma^2}} \quad < 0$$

である．だから価値関数の一般解は

$$V(x,y) = g_1 y^{\beta_1} + g_2 y^{\beta_2}$$

と表現される．境界条件 $V(s,0)=0$ を満たすためには、$g_2=0$ でなければならない．よって、

$$V(s,y) = g_1 y^{\beta_1}$$

と表現できる．残り二つの境界条件を用いると、

$$g_1 = \frac{\pi^*/(\rho-\alpha) - K}{(\pi^*)^{\beta_1}}$$

$$\pi^* = (\rho-\alpha)\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}K$$

が得られる．

最適な投資タイミング T^* は利潤 $\pi(t)$ が臨界利潤 π^* を越えた瞬間に一致する．

$$\pi(T^*) \geq \pi^* = (\rho-\alpha)\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}K$$

が満たされるように、投資タイミングは決定される．NPV による投資基準では、最適投資タイミングは、$\pi(T^*) \geq (\rho-\alpha)K$ が満たされるときである．

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1$$

なので、不確実性に直面するときの臨界利潤は

$$\pi^* > (\rho-\alpha)K$$

を満たしている．不確実性に直面するときには、企業は利潤に正のリスク・プレミアムを要求する．要求されるリスク・プレミアムは

$$(\rho-\alpha)\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}K - (\rho-\alpha)K$$

の大きさである．投資タイミングを資本のユーザー・コストの概念から解釈してみる．β の 2 次方程式から、

$$(\rho-\alpha)\frac{\beta_1}{\beta_1} = \rho + \frac{1}{2}\sigma^2\beta_1$$

が成立することが分かるので、

$$\pi^* = (\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\beta_1)K > \rho K$$

なる関係が満たされている．ρK が資本のユーザー・コストなので、臨界利潤は資本のユーザー・コストを超えなければいけない。価格の不確実性が大きくなる、つまり、σ の値が大きくなるにつれて、臨界利潤の大きさも増加する．投資のタイミングは、不確実性が増えるに従って、遅延することがわかる．言い換えると、投資プロジェクトを保有するというコール・オプションの価値が上昇する．

上記のモデルを、可変的な生産量とそれに対応する生産費用 (固定費用＋可変費用) を含めるように拡張することは容易である．資本等の減価償却を明示的にモデルに導入することも簡単にできる．ここでの結論を一般化すれば、以下のような投資行動の特徴を導出することができる．資本の限界的な拡張からもたらされる企業価値の増加分は、資本増強による営業利潤の増加分から資本増強投資プロジェクトのオプション価値を差し引いた値に等しくなる．また、トービンの q との関係で言えば、営業利潤を資本の関数 $\pi(K, X)$、資本財の価格を ω と表記すると、条件

$$q(K) = \frac{\pi_K(K, X)}{(\rho - \alpha)\omega} \geq \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$$

が成立するようなとき、資本増強投資プロジェクトを実施させることが望ましいことになる．ここで X は企業の収益に影響を与える (上のモデルの価格 p に対応する) 確率過程である．$\pi_K(K, X)/(\rho - \alpha)$ は資本の限界的な増大がもたらす企業収益増加分の現在価値に他ならない．上の式を等式で成立させる確率過程 X の値 X^* が投資のトリガーを引く閾値になっている．つまり、確率過程の実現値 X が X^* を越えた時、資本の増強が実施されることになる.[12]　X のボラティリティが増大するとき、この閾値が上昇するか否かは、営業利潤が X の凸関数になっているかどうか、および、パラメター値 ρ, α の大きさに依存するので、一般的に断定できない．

この議論から推察されるとおり、また、 Abel, et. al.(1996) が明確に指摘したように、資本財の購入をコール・オプションの実行、古い資本財の売却をプット・オプションの実行と理解するとき、企業の最適な投資行動は一般的に Ss タイプのトリガー戦略に従う．つまり、企業は、資本の限界収益生産物が、伝統的なユーザーコストとコールオプションの限界価値の和に等しい閾値を越えるとき投資を実行し、伝統的なユーザーコストからプットオプションの限界価値を引いた値に等しい閾値を下回るとき資本財を売却する．このような Ss タイプのトリガー戦略は企業の投資行動だけでなく、企業の雇用政策や価格政策など、多くの政策に観察される特徴でもある．例えば、Dixit(1989) は為替レートの確率的な変動に直面する外国企業の参入・退出政策が類似の Ss タイプのトリガー戦略に従うことを示している．

上記のモデルをより一般的なより現実的なリアル・オプションに対して拡張した研究も一定程度進んできた．Majd and Pindyck(1987) は他段階にわたる投資プロジェクトの実施問題 (time to build option) を分析、MacDonald and Siegel(1985) および Brennan and Schwartz(1985) は操業停止と操業再開を含めた投資プロジェクト (option to alter operating scale) を分析している．Pindyck(1988) は資本拡張の多段階的投資問題 (option to alter operating scale のカテゴリーに分類できる) をモデル化している．最近は、Schwartz(2001)、Hsu and Schwartz(2003)、あるいは Berk, Green and Naik(2004) に見られるように、R&D 投資を多段階複合リアル・オプションとして定式化し、ハイテク産業、例えば製薬企業やインターネット関連企業の R&D 投資行動を説明しようとする研究が進展している．

ところで、ここまでの分析では、個別企業が直面する不確実性ショックは他の企業の行動に影響されないことを暗黙のうちに仮定している．個別企業が直面する不確実性が当該企業に固有のショックであり、利潤の大きさがこのショックの線形関数であるとしよう．このとき、不確実性のボラティリティが変化しても利潤の期待値は変化しない．しかし、投資プロジェクトのコールオプションの価値はショックの凸関数となっているから、不確実性が増加するとコールオプションの価値は増加するので、投資を先送りした方がより大きな利益を期待できることになる．個別企業が直面する不確実性が産業全体に共通するショックであるならば、このシナリオは変化する．例えば、市場価格が増加すると予想されるとき、新規企業が当該産業に参入し、生産量が増加すると予想される．市場価格は予想された水準よりも低くなる．従って、各企業の

[12] この結論は収益関数 $\pi(K, X)$ が資本ストック K の収穫逓減になることを前提としている．企業の収益関数 $\pi(K, X)$ が資本ストック K に関して収穫逓増の部分を含んでいる場合、初期資本量が関数 $\pi(K, X)$ の変曲点よりも少ない水準にあったならば、追加的な資本拡張は限界的な増大としてではなく、一括的な離散的投資規模となる．

意思決定はある意味で相互依存している．完全競争市場においても、新規企業の参入や既存企業の退出を伴って、各企業が予想する価格の将来経路は内生的に決定されるものであり、各企業にとって外生的であるとは簡単に言い切れない．投資プロジェクトのコールオプションの価値あるいはプットオプションの価値を計算する際に、このような新規企業の参入や既存企業の退出を通した相互依存関係を考慮する必要に迫られる．Leahy(1993) と Dixit and Pindyck(1994)(第 8 章) は他の企業の行動を無視して投資決定を行なうような近視眼的な政策が競争市場では最適な政策になっていると指摘した．これに対して、Ordenin, et. al.(2007) は近視眼的な政策に基づくときトリガー価格の推定に無視できない誤差を生じると反論している．これらの議論では、しかし、各企業の費用構造は同一で、同質であることが前提とされている．企業間の市場競争を明示的に分析するためには、各企業間に見られる費用構造などにおける異質性を導入することが重要である.[13]

各企業間の戦略的な相互依存関係が重要となる市場構造では、例えば、生産物市場が寡占的な市場である場合、今までのモデル分析では重視されなかった論点が登場する．すなわち、投資時期を先送りしたときには、ライバル企業が当該市場における利潤機会を奪ってしまう可能性が生じる．産業組織論でよく知られている通り、不可逆的な投資にコミットすることが、ライバル企業が参入して得ようとする利潤機会を前もって先制的に確保して、ライバル企業の参入を阻止する戦略となりうる．また、新製品開発や製造効率改善を目指した R&D 投資プロジェクトに見られるように、最初に初期投資を実施した企業は、他企業に比較して、より多くの将来的成長機会の可能性を入手できる．このような将来における成長の可能性を確保する投資機会をもたらす投資を投資の戦略的成長オプションと呼んでいる.[14]　投資が戦略的な先制権の確保や成長オプションとなるような場合には、投資を遅らせることに伴う投資オプションの価値を引き下げる作用が働く．このような作用が働くケースにおいては、単純なリアル・オプション・モデルの結論は修正される必要があるので、どのように修正されるのかを理解するための研究が要請されることになる．Lambrecht and Perraudin(2003) は、先取りの可能性を持つ複占モデルを用いて、投資時期を決定する利潤の臨界値が、いわゆる NPV ルールで定める臨界値と単純なリアル・オプションモデルで計算される臨界値の間に位置することを示した．Weds(2002) は、パテントを獲得するための R&D 競争投資において、成功の可能性がポアッソン過程で定式化されるモデルでは、R&D 投資を遅らせるオプションの価値を引き下げるような作用が必ずしも優越するとは限らないことを示した．寡占市場における企業間の戦略的な相互依存関係の下での投資行動のリアル・オプション・モデル分析は未だ十分な発展を見ていない．

4　金融資産の運用と投資問題

最後に、ファイナンスの領域における投資問題、最適ポートフォリオ問題を取り上げる．最適ポートフォリオ問題を連続時間確率過程における最適制御理論を用いて分析した最初の研究は Merton(1969,1971,1973) による．この分析枠組み上で、派生金融商品の価格付け問題に解答を与える研究が進展した[15]．ここでは、Merton-Black-Scholes の枠組みの上で、ポートフォリオの最適な資産選択問題を考える．単純化のために、金融資産市場に 2 種類の資産、危険資産と安全資産が存在すると仮定する．危険資産の価格 p_1 は確率微分

[13]と Dixit and Pindyck(1994) の第 8 章および Caballero and Pindyck(1996) では、産業に共通する不確実性ショックと個別企業に固有の不確実性ショックを区別して、トリガー政策を分析している．しかし、企業間の費用構造上における異質性の問題は無視されている．

[14]複合的な投資オプションや戦略的成長オプションについては、Trigeorgis(1996) や Kulatilaka and Perotti(1998) を参照してください．複合的な投資オプションとゲーム論的な考え方を含めた戦略的な投資論については、Smit and Trigeorgis(2004) を参照してください.

[15]あまりにも有名な代表例は、Black and Scholes(1973) である．

方程式

$$dp_1 = p_1(\alpha dt + \sigma dw)$$

に従って変動する．他方、安全資産の価格 p_2 は微分方程式

$$dp_2 = rp_2 dt$$

に従って変動する．r, α, σ は時間や状態変数に依存せず一定であると仮定し、

$$r < \alpha,\ \sigma > 0$$

を満たす．また、w は標準ブラウン運動である．総資産のうち危険資産への配分率を π、総資産のうち消費に費やされる量を c とおく．ここでの政策変数はベクトル

$$u(t) = (\pi(t), c(t)),\ 1 \geq \pi(t) \geq 0, c(t) \geq 0$$

となる．このとき、総資産 ξ の変動は以下の確率微分方程式で表現できる．

$$d\xi = (1-\pi)\xi r dt + \pi\xi(\alpha dt + \sigma dw) - c dt.$$

目的関数は

$$J(0, x_0, \mathrm{u}) = E_0[\int_{t_0}^{t_1} U(c(t))e^{-\rho t}]dt$$

である．ここで、U はいわゆる効用関数で、通常の数学的条件を満たすと仮定する．

この問題に対するハミルトン-ヤコビの方程式は、

$$\rho V = V_s + \max[U(c) + \frac{1}{2}(\pi\sigma y)^2 V_{yy} + \{(1-\pi)yr + \pi y\alpha - c\}V_y] \tag{9}$$

となる．境界条件は

$$V(t_1, y) = 0$$

である．(9) 式の最大化を実行する．π に関して

$$\pi(y\sigma)^2 V_{yy} + (\alpha - r)yV_y = 0$$

が成立しなければならない．よって、

$$\pi = \frac{(r-\alpha)V_y}{\sigma^2 y V_{yy}}$$

となる．同様に、c に関して、

$$U'(c) = V_y$$

が得られる．ここで、効用関数の性質

$$U' > 0,\ U'(0) = \infty;\ U'' < 0$$

から、$V_y > 0$ と $V_{yy} < 0$ が成り立つことが分かる．よって、$\pi > 0$ である．$V(y)$ を富の間接的効用関数と理解すると、この効用関数の相対的危険回避度は $-yV_{yy}/V_y$ である．危険資産への最適な配分率は、リスク・プレミアム $\alpha - r$ の大きさに比例すると同時に、相対的危険回避度の大きさの逆数に比例する．また、危険資産の不安定性 σ が大きくなると、危険資産への配分率は下落する．

(9) 式の解を一般的に求めることは困難である．Merton(1969,1971,1973) の研究は、効用関数が Hyperbolic Abolute Risk Aversion(HARA) 関数形になる場合には、解析解が導出できることを示している．ここでは、HARA 関数形の特殊ケースになる、相対危険回避度一定の効用関数

$$U(c) = \frac{1}{\beta}c^{\beta},\ \beta \neq 0, \beta < 1$$

を仮定する.[16] 価値関数は効用関数と類似の関数形となることを想定して

$$V(s,y) = g(s)y^{\beta}$$

と置いてみる．この関数形の下では、政策変数は

$$\pi = \frac{r-\alpha}{\sigma^2(\beta-1)};\ c = y[\beta g(s)]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

となる．この結果は、危険資産への配分率が時間に依存せず一定であることを意味する．また、消費は資産額に比例することも分かる．以上の関数形を式 (9) に代入すると、

$$[g'(s) + \gamma g(s) + (1/\beta - 1)\{\beta g(s)\}^{\beta/(\beta-1)}]y^{\beta} = 0$$

なる微分方程式が得られる．ここで、定数項の γ は

$$\gamma = \beta(r + \frac{(r-\alpha)^2}{2\sigma^2(1-\beta)}) - \rho$$

で定義される．任意の初期値 y に対して上記の微分方程式は成立するので、$g(s)$ に関する微分方程式

$$g'(s) + \gamma g(s) + (1/\beta - 1)\{\beta g(s)\}^{\beta/(\beta-1)} = 0$$

を解くことに帰着する．ここで、$g(s)$ を

$$h(s) = g^{1/(1-\beta)}$$

と新しい変数に変換をする．$h(s)$ は微分方程式

$$h'(s) + \frac{\gamma}{1-\beta}h(s) + \beta^{1/(\beta-1)} = 0$$

を満たさなければならない．境界条件 $h(t_1) = 0$ を用いると、この微分方程式の解は

$$h(s) = \beta^{1/(\beta-1)}\frac{1-\beta}{\gamma}[e^{\frac{\gamma}{1-\beta}(t_1-s)} - 1]$$

となる．従って、

$$g(s) = \frac{1}{\beta}[\frac{1-\beta}{\gamma}\{e^{\frac{\gamma}{1-\beta}(t_1-s)} - 1\}]^{1-\beta}$$

が得られる．

計画期間 t_1 が無限大になる場合、横断性の条件 $\lim_{t_1\to\infty} e^{-\rho t_1}E_t[V(t_1,y)] = 0$ のもとで、極限 $t_1 \to \infty$ を取ったときに一致する．ただし、資産の現在価値が有限に留まるための条件が必要となる．この条件は、$\gamma < 0$ と表現できる．簡単に言えば、資産価値の上昇率は割引率 ρ よりも小さくなることが要求される．

Merton(1971) が示したとおり、資産価格が対数正規分布に従うとき、つまり、価格変動を支配する確率微分方程式のドリフト係数 α および分散係数 σ が一定であるとき、上記の分析を危険資産の種類が多数に

[16] $\beta = 0$ のときは、$U(c) = \ln c$ と置かれる．この場合も、同様に解を求めることが出来る．

なるケースに拡張することは容易であり、資産選択における分離定理や投資信託定理を証明することも出来る．危険資産の種類を n とすると、危険資産の価格 p も n 次元ベクトル、配分率 π も n 次元ベクトルとなる．価格変動が k 次元のブラウン運動によって攪乱されているとする．価格変動の確率微分方程式におけるドリフト係数 α は n 次元ベクトル、分散係数 σ は $n \times k$ 行列となる．このとき、各危険資産への配分率は

$$\pi = \frac{-V_y(s,y)}{yV_{yy}(s,y)}[\sigma\sigma^t]^{-1}[\alpha - rI]$$

と表現できる．明らかに、この配分率は時間に依存せず、富の大きさにも依存していない．配分率は、各危険資産のリスク・プレミアムに比例し、相対的危険回避度の逆数に比例する.[17]　このような特徴を持つ投資行動を近視眼的 (myopic) な投資行動という．この結論は、上記の式で決定される各危険資産の構成比率で危険資産のファンドを作成し、この危険資産のファンドと安全資産をポートフォリオに組み込めば、最適な資産運用が出来ることを意味する.[18]

上記のモデルは取引費用がゼロ、市場情報が完全であるような経済環境を前提としている．金融資産の取引に費用を要する場合、あるいは情報が不完全であるとき、上での結論がどのように修正されるのであろうか．Constantinides(1986) の研究などで、金融資産の取引費用を明示的にモデルに導入したときは、Ss タイプのトリガー政策が用いられることが知られている．また、観察される市場情報に雑音がまじっているときのモデル分析は Detemple(1986)、Dothan and Feldman(1986)、Gennotte(1986) などの研究で行なわれている．基本的な結論としては、政策決定と予測推定が分離できるならば、Kalman-Bucy フィルターなどで予測推定される期待値を上で展開したモデルの状態変数値に代入すると最適な政策が実現できる．

以上の分析過程から明らかな通り、効用関数が HARA 関数形として表現できず、より一般的な関数形になる場合、金融資産の投資需要関数を解析的に導出し、その特徴を分析することは困難となる．また、実質利子率が確率的な変動を示したり、インフレ率の予測にリスクが伴うとき、あるいは、金融資産の期待収益率が他の状態変数の関数となって、ある種の確率過程に従うような、投資家の投資環境が時間と共に変動する時にも、金融資産への投資需要関数を解析的に導出することは困難である．近年、Merton モデルを拡張して、こうしたより一般的な経済環境の下での投資行動を説明しようとする研究が進展している．Brennan and Xia(2002)、Chacko and Viceira(2005)、Duffie and Epstein(1992)、Constantinides(1990)、Kim and Omberg(1996)、Liu(2007) および Wachter(2002) などの研究に見られるように、ある特定の定式化においては解析解を導出できることが知られている．解析解が得られない場合には、近似解法を用いてモデルの特徴を分析するか、あるいは、シミュレーションによって数値解を計算し、その一般的な特徴を分析する方法が採用される．金融資産の投資需要関数の特徴を近似解法を用いて分析した研究については、Campbell and Viceira(2002) で取り上げられている諸文献を参照してください．PC 技術の発展に伴って、数値解法の研究が大きく進展している．近年における数値解析は MATLAB や Gauss などの数値計算ソフトウエアを用いている．MATLAB を用いた数値解析シミュレーション技法の説明に関しては Brandimarte(2006)、GAUSS を用いた技法については Heer and Maussner(2005) を参照してください．

[17] 具体的な計算については、Merton(1973) あるいは数理ファイナンスの専門書である Karatzas and Shreve(1998) や Duffie(2001) などを参照してください．

[18] 金融資産市場が完備であれば、動的計画法を採用するよりも、マーチンゲール・アプローチと呼ばれる手法を用いる方が計算が容易で、応用範囲が広いことが知られている．マーチンゲール・アプローチは本稿の範囲を超えるので、マーチンゲール・アプローチに基づく分析方法の説明は省略する．マーチンゲール・アプローチについては、Karatzas and Shreve(1998) や Duffie(2001) などを参照してください．

5　終りに

企業の実物投資行動と機関投資家あるいは家計の金融投資行動を説明する確率動学モデルを考察してきた．ここでは、企業の実物投資行動を説明する理論モデルの分析で残された諸課題を提起することにする．企業の実物投資行動の理論モデルでは、企業が実物投資を行なう際に直面する将来不確実性を連続時間確率過程として定式化しているが、不確実性は需要関数 (あるいは収益関数）の将来不確実性としてモデル化されている．その際、需要量および収益に大きく影響する価格の不確実な変動を定数係数の幾何ブラウン運動によって記述している．定数係数の幾何ブラウン運動を想定することは価格変動のボラティリティが一定であることを前提している．価格変動あるいは収益に大きく影響する不確実な変数のボラティリティが時間と共に変化するケースについては詳細な分析がなされていない．また、企業が直面する不確実性として、供給サイドの経済環境における不確実性、例えば、R&D 技術や生産性における不確実性そして生産要素価格の不確実性などを明示的にモデル化した分析が必要とされている.[19]　将来不確実性を生み出す状態変数は必ずしも幾何ブラウン運動のような拡散確率過程によって定式化できるとは限らない．状態変数が拡散過程以外の確率過程に従う実例は少なくはないと思われる．耐久財消費の変動はロジステック曲線のような確率過程に良く似た経路をたどることは良く知られている．確率変数がロジステック曲線を生み出すような確率過程や飛躍型確率過程に従う場合のモデル化とそのもとでのモデル分析が必要とされている．

企業の投資行動と投資資金の調達政策が関係しているならば、資本市場の不完全性を無視することは許されない．資金制約が存在するケースの分析はまだ端緒に着いたところである.[20]　内部留保された資金のみで投資を実行せざるを得ない企業と、資本市場から低利に借り入れたり、資本の増資によって投資資金を容易に調達できる企業の投資行動には明らかに相違が存在する．こうした企業間の差異と共通性を解明する案件は残されている．

本稿では、各企業の投資行動をマクロ経済全体に集計する問題、あるいは一般均衡理論の枠内に取り込む問題については触れなかった．個別企業の投資行動が Ss タイプのトリガー戦略となっている事実は上記のモデルから説明できているが、一般均衡の枠内にこの企業行動を位置付けたとき、現実経済でのマクロ的な投資変動を説明できるか否かの問題が残る．Khan and Thomas(2003)、Thomas(2002) および Veracierto(2002) の研究によれば、投資の非可逆的な性質を一般均衡モデルに明示的に導入しても、投資が可逆的であるケースと比べてそれほど異なる結果を得られないと言う．他方で、Bachman, Caballero and Engel(2006) の研究では、個別企業の投資行動に見られる Ss タイプのトリガー戦略の存在がマクロ的な投資変動のかなりの割合を説明できると指摘されている．これらの問題は未決着の案件で、更なる研究が必要とされている．

Appendix:確率的最適制御問題の解法

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を考える．$\mathscr{S}$ を分離可能な完備距離空間とする．ある関数 x が Ω から空間 $\mathscr{S}$ への写像であり、σ 代数族 $\mathscr{F}$ に関して可測であると同時に、$\mathscr{S}$ のボレル集合族 $\mathscr{B}(\mathscr{S})$ に関しても可測であるならば、関数 x は確率ベクトルの定義を満たす．通常、$\mathscr{S} = R^n$ とする．確率過程 ξ は、パラメター集合 $\mathscr{T}$ に属する時刻 t に対して確率ベクトル $\xi(t, \cdot)$ を対応させるものである．時刻の集合 $\mathscr{T}$ は通常 1 次元実数空間 R^1 の部分集合である．ここでは、時刻の集合 $\mathscr{T}$ は実数のコンパクトな区間 $[t_0, t_1]$ とする．こうして、確率過程 $\xi = \xi(\cdot, \cdot)$ は直積集合 $\mathscr{T} \times \Omega$ から集合 $\mathscr{S}$ への写像となっている．集合 $\mathscr{S}$ は確率過程の状態空間と呼ばれている．$\xi(\cdot, \omega)$ が Ω のほとんどすべての点に対して $\mathscr{T}$ 上で連続ならば、確率過程 ξ は連続な確率過程と言われる．関数 $\xi(\cdot, \omega)$ は確率過程 ξ のサンプル関数と言われる．したがって、確率過程の連続性はサンプル関数の連続性を含意する．ブラウン運動およびブラウン運動によって引きこされる拡散過程 (伊藤過程とも言われる) のサンプル関数は連続である．連続な確率過程における確率計算は伊藤の公式と呼ばれ

[19]Chetty(2007) は利子率の不確実性が投資行動に及ぼす効果を考察している．
[20]Caggese(2007) は資金制約が投資行動に及ぼす効果を分析している．

る積分と微分操作を必須の手法とする.

[伊藤の公式]

もし ψ が関数族 $C^{1,2}$ に属し、$\eta(t) = \psi[t, \xi(t)],\ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ w = (w_1, \ldots, w_d)$ であるとする．ただし、ξ は確率微分方程式

$$d\xi = b(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dw \tag{10}$$

を満たす確率過程である．dw_i は標準ブラウン運動の増分である ($dw \sim N[0, dt]$)．このとき、関係式

$$d\eta = \psi_t(t, \xi(t))dt + \psi_x(t, \xi(t))d\xi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} a_{ij}\psi_{x_i x_j}(t, \xi(t))dt,$$

が成立する．ただし、

$$\psi_x = (\psi_{x_1}, \ldots, \psi_{x_n}),\ a_{ij} = \sum_{l=1} \sigma_{il}\sigma_{jl}$$

である．ψ_{x_i} は変数 ξ_i による偏微分を表す．これを伊藤の確率微分公式という.

伊藤の公式が成立する端的な理由はブラウン運動の 2 次変分が時間の線形関数になっていることによる．関数 η をテイラー級数展開するときに、$dt^2 \approx 0,\ dwdt \approx 0$ が成立する一方で、2 次の項に $dw(t)dw(t) = dt$ が含まれてしまうので、2 次項すべてを無視できず、dw の 2 次項を含む近似式で考えなければいけないことによる．関数 $\eta(t) = \psi(t, \xi(t))$ に伊藤の公式を適用し、ξ の確率微分方程式を代入すると、

$$d\eta = \psi_t(t, \xi(t))dt + \psi_x(t, \xi(t))b(t, \xi)dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} a_{ij}\psi_{x_i, x_j}(t, \xi(t))dt + \psi_x(t, \xi(t))\sigma(t, \xi(t))dw,$$

が得られる．この両辺を積分すると、

$$\psi(t, \xi(t)) - \psi(s, \xi(s)) = \int_s^t [\psi_t + \mathscr{A}(r)\psi(r)]dr + \int_s^t \psi_x \sigma dw$$

となる．ここで、$\mathscr{A}$ は生成作用素と呼ばれるオペレータで

$$\mathscr{A}(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} a_{ij}(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1} b_i(t, x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

と定義される．上式の両辺の期待値をとれば、

$$\psi(s, y) = -E_{sy}\int_s^t [\psi_t + \mathscr{A}(r)\psi(r)]dr + E_{sy}\psi(t, \xi(t)) \tag{11}$$

が成り立つ.

システムの状態が不確実なので、政策変数 u は観察された状態変数に依存するようなフィードバック関数を取る必要がある．この政策変数は $Q^0 = (t_0, t_1) \times R^n$ から U(ユークリッド空間の部分集合) へのボレル可測な関数と仮定される。システムの状態が政策変数 u に依存することを明示的に表現すると、システムを支配する確率微分方程式は

$$d\xi = f(t, \xi(t), u(t))dt + \sigma(t, \xi(t), u(t))dw \tag{12}$$

と表現される．確率的最適制御問題は、システムの状態 $\xi(t)$ が確率微分方程式 (12) に従うとき、評価関数

$$J(t_0, x_0, \mathsf{u}) = E_{t_0, x_0}\left[\int_{t_0}^{t_1} L(t, \xi(t), u(t))dt + \Phi(t_1, \xi(t_1))\right]$$

を最大にする政策変数 u をフィードバック形式

$$u(t) = \mathsf{u}(t, \xi(t))$$

で求めることである．ここで、(t_0, x_0) はシステムの初期時刻と初期値である．

動的計画法の価値関数は

$$W(s, y) = \sup_{\mathsf{u}} J(s, y, \mathsf{u})$$

で与えられる．ここで、(s, y) は初期値である。最適化問題の解が u^* であるならば、すべての $(s, y) \in Q^0$ に対して $W(s, y) = J(s, y, \mathsf{u}^*)$ が成立する．式 (11) において、$\psi = W$ とおくと、すべての $s < t \leq t_1$ に対して、

$$W(s, y) = -E_{sy} \int_s^t [W_s(r, \xi(r)) + \mathcal{A}(r) W(r, \xi(r))] dr + E_{sy} W(t, \xi(t)) \tag{13}$$

が成立する．

政策変数が最適な政策変数から乖離しているとき、例えば、

$$u_1(r, x) = \begin{cases} u(r, x), & r \leq t, \\ u^*(r, x), & r > t \end{cases}$$

であるとき、条件付期待値の性質から

$$J(s, y, \mathsf{u}_1) = E_{sy} \int_s^t L(r, \xi(r), u(r)) dr + E_{sy} J(t, \xi(t), \mathsf{u}^*)$$

が成り立つ．当然のことながら、

$$W(t, \xi(t)) = J(t, \xi(t), \mathsf{u}^*)$$

が成立している．さらに、

$$W(s, y) \geq J(s, y, \mathsf{u}_1) = E_{sy} \int_s^t L(r, \xi(r), u(r)) dr + E_{sy} W(t, \xi(t)) \tag{14}$$

が成り立つことも容易に理解できる．式 (14) から 式 (13) を引き算し、$v = u(s, y)$ と置けば

$$0 \geq W_s + \mathcal{A}(s) W + L(s, y, v)$$

が得られる．$v = \mathsf{u}^*(s, y)$ であるときに、不等式は等式となる．ここで、確率的最適制御問題における動的計画法の基本方程式

$$W_s + \sup_{v \in U} [\mathcal{A}(s) W + L(s, y, v)] = 0 \tag{15}$$

が得られる．境界条件は

$$W(t_1, y) = \Phi(t_1, y)$$

である．(15) 式はハミルトン - ヤコビ - ベルマン方程式と言われている．

確率過程が確率微分方程式 (12) に従うとき、生成作用素 $\mathcal{A}$ は以下のように表現できる．

$$\mathcal{A}(s)\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} a_{ij}(s, y, v) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1} f_i(s, y, v) \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}$$

この結果を用いると、以下の定理が成立する．

[確率的最適制御問題の基本方程式]

$W(s,y)$ を動的計画法の基本方程式 (ハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式)

$$W_s + \max_{v \in U}[\mathcal{A}(s)W + L(s,y,v)] = 0, \ (s,y) \in Q^0$$

の解であるとする．このとき、

(1). 許容されたフィードバック政策変数 u と任意の初期データ $(s,y) \in Q^0$ に対して、

$$W(s,y) \geq J(s,y,\mathrm{u})$$

である；

(2). u^* が許容されたフィードバック政策であり、すべての初期値データ $(s,y) \in Q^0$ に対して

$$\mathcal{A}(s)W + L(s,x,u^*) = \max_{v \in U}[\mathcal{A}(s)W + L(s,x,v)]$$

を満たすならば、$W(s,y) = J(s,y,\mathrm{u}^*)$ である．つまり、 u^* は最適解である．

この定理の証明は、Fleming and Rishel(1975), chapter VIを参照してください．u が許容されたフィードバック政策であるための条件は、要約すると、u がボレル可測で、有界であること、そして、その政策が適用されたとき確率微分方程式 (12) の解が存在し、有界であることを要求する．関数 u の不連続な点の集合は測度ゼロであり、ほとんどすべての時刻で連続であることが要求される．

経済学で直面する最適化問題における目的関数は

$$J(0,x_0,\mathrm{u}) = E_{0,x_0}[\int_0^{t_1} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho t}dt + \Phi(t_1,\xi(t_1))e^{-\rho t_1}]$$

と一般的に表現される。ここで、定数 ρ は限界時間選好率あるいは割引率と言われる。価値関数を

$$W(s,y) = \sup_{\mathrm{u}} E_{sy}[\int_s^{t_1} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + \Phi(t_1,\xi(t_1))e^{-\rho(t_1-s)}]e^{-\rho s}$$

とおき、新しく関数 $V(s,y)$ を

$$V(s,y) = \sup_{\mathrm{u}} E_{sy}[\int_s^{t_1} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + \Phi(t_1,\xi(t_1))e^{-\rho(t_1-s)}]$$

と定義する．つまり、

$$W(s,y) = V(s,y)e^{-\rho s}$$

なる関係が成り立つ。この関係式を、式 (15) に代入すれば、動的計画法のハミルトン-ヤコビ - ベルマン方程式は

$$V_s + \max_{v \in U}[\mathcal{A}(s)V + L(s,y,v)] = \rho V(s,y) \tag{16}$$

と定式化される．

経済学でのモデル分析では、経済学的な直感が重要な役割を果たすので、経済学的な概念と整合的な動的計画法の基本方程式の利用方法が有効である．ここで、経済学的な概念と整合的な動的計画法の基本方程式を導出する．

$$F(s,y,\mathrm{u}) = E_{sy}[\int_s^{t_1} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + \Phi(t_1,\xi(t_1))e^{-\rho(t_1-s)}]$$

と関数 F を定義すると、

$$V(s,y) = \sup_u F(s,y,\mathsf{u})$$

という関係が成立している．

$$F(s+dt, y+dx, \mathsf{u}) = E_{s+dt,y+dx}[\int_{s+dt}^{t_1} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s-dt)}dt + \Phi(t_1,\xi(t_1))e^{-\rho(t_1-s-dt)}]$$

である．よって、

$$\begin{aligned} F(s,y,\mathsf{u}) &= E_{sy}[\int_s^{s+dt} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + e^{-\rho dt}F(s+dt,y+dx,\mathsf{u})] + o(dt) \\ &= E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt + e^{-\rho dt}F(s+dt,y+dx,\mathsf{u})] + o(dt) \end{aligned}$$

が成立する。動的計画法における最適性の原理から

$$V(s,y) = \sup_u E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt + e^{-\rho dt}V(s+dt,y+dx)] \tag{17}$$

である．関係式

$$V(s+dt,y+dx) = V(s,y) + dV(s,y) + o(dt)$$

を (17) 式に代入すると、

$$V(s,y) = \sup_u E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt + e^{-\rho dt}V(s,y) + e^{-\rho dt}dV(s,y)]$$

となり、さらに、

$$e^{-\rho dt} = 1 - \rho dt + \frac{(\rho dt)^2}{2!} - \frac{(\rho dt)^3}{3!} + \ldots$$

を用いて、$dt \to 0$ とすると、(17) 式は最終的に

$$\rho V(s,y) = \max_v \{L(s,y,v) + \frac{1}{dt}E_{sy}[dV(s,y)]\} \tag{18}$$

という関係式として成立する．これが動的計画法のベルマン方程式である。企業の投資行動での基本方程式と理解するならば、(18) 式の左辺は企業の所有者が要求する収益の大きさと理解される．他方、右辺の第 1 項は企業が獲得する利益の大きさで、第 2 項は企業価値のキャピタル・ゲインと理解されている．(18) 式は、企業所有者が要求する収益と企業所有者が予想する収益とが一致することを表現している．基本方程式 (18) に登場する $dV(s,y)$ は伊藤の公式を用いて計算できる．このとき、(18) 式は (16) と一致する．

引用文献

(1). Andrew B. Abel(1983), Optimal Investment under Uncertainty, *American Economic Review*, 73(1), 228-233.

(2). Andrew B. Abel(1985), A Stochastic Model of Investment, Marginal q and the Market Value of the Firm, *International Economic Review*, 26(2), 305-322.

(3). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(1994), A Unified Model of Investment Under Uncertainty, *American Economic Review*, 84(1).

(4). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(1996), Optimal Investment with Costly Reversibility, *Review of Economic Studies*, 63, 581-593.

(5). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(1999), The Effects of Reversibility and Uncertainty on Capital Accumulation, *Journal of Monetary Economics*, 44, 339-377.

(6). Andrew B. Abel and Janice C. Eberly(2002), Investment and q with Fixed Costs: An Empirical Analysis, NBER Working Paper.

(7). Andrew B. Abel, Avinash K. Dixit, Janice C. Eberly, and Robert S. Pindyck(1996), Options, the Value of Capital, and Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 111(3), 753-777.

(8). Kenneth J. Arrow(1968), Optimal Capital Policy with Irreversible Investment, in J. N. Wolf(ed.), *Value, Capital, and Growth: pepers in Honour of Sir John Hicks*, Edinburgh University Press.

(9). Ruediger Bachman, Richardo J. Caballero and Eduardo M.R.A. Engel(2006), Lumpy Investment in Dynamic General Equilibrium, Mimeo.

(10). Ben S. Bernanke(1983), Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 98(1), 85-106.

(11). Guiseppe Bertola and Ricardo J. Caballero(1994), Irreversibility and Aggregate Investment, *Review of Economic Studies*, 61, 223-246.

(12). Jonathan B. Berk, richrad C. Green, and Vasant Naik(2004), Valuation and Return Dynamics of New Ventures, *Review of Financial Studies*, 17(1), 1-35.

(13). Paulo Brandimarte(2006), *Numerical Methods in Finance and Economics: MATLAB-Based Introduction*, Second Edition, Wiley-Interscience.

(14). Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz(1985), Evaluating Natural Resources Investment, *Journal of Business*, 58(2), 135-157.

(15). Michael J. Brennan and Yihong Xia(2002), Dynamic Asset Allocation under Inflation, *Journal of Finance*, 57(3), 1201-1238.

(16). Ricardo J. Caballero(1991), On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship, *American Economic Review*, 81(1),279-288.

(17). Ricardo J. Caballero and Eduard M.R.A. Engel(1999), Explaining Investment Dynamics in U.S. Manufacturing: A Generalized (S,s) Approach, *Econometrica*, 67(4), 783-826.

(18). Ricardo J. Caballero and John V. Leahy(1996), Fixed Costs: The Demise of Marginal q, NBER Working Paper.

(19). Ricardo J. Caballero and Robert S. Pindyck(1996), Uncertainty, Investment, and Industry Evolution, *International Economic Review*, 37(3), 641-662.

(20). Andrea Caggese(2007), Financing Constraints, Irreversibility, and Investment Dynamics, *Journal of Monetary Economy*, 54, 2102-2130.

(21). John Y. Campbell and Luis M. Viceira(2002), *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press.

(22). George Chacko and Luis M. Viceira(2005), Dynamic Consumption and Portfolio Choice with Stochastic Valatility in Incomplete Markets, *Review of Financial Studies*, 18(4), 1369-1401.

(23). Raj Chetty(2007), Interest Rates, Irreversibility, and Backward-Bending Investment, *Review of Economic Studies*, 74, 67-91.

(24). George M. Constantinides(1986), Capital Market Equilibrium with Transaction Costs, *Journal of Political Economy*, 94(4), 842-862.

(25). George M. Constantinides(1990), Habit Formation: A Resolution of the Equity Puzzle, *Journal of Political Economy*, 98(3), 519-543.

(26). Jerome B. Detemple(1986), Asset Pricing in a Productoin Economy with Incomplete Information, *Journal of Finance*, 41(2), 383-391.

(27). Avinash Dixit(1989), Entry and Exit Decisions under Uncertainty, *Journal of Political Economy*, 97(3), 620-638.

(28). Avinash K. Dixit and Robert S. Pindyck(1994), *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press.

(29). Michael U. Dothan and David Feldman(1986), Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a pertially Observable Economy, *Journal of Finance*, 41(2), 369-382.

(30). Barrel Duffie(2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, third edition, Princeton University Press.

(31). Barrel Duffie and Larry G. Epstein(1992), Stoshastic Differential Utility, *Econometrica*, 60(2), 353-394.

(32). Janice C. Eberly(2007), Irreversible Investment, forthcoming in *New Palgrave Dictionary of Economics.*

(33). Wendell H. Fleming and Raymonnd W. Rishel(1975), *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag.

(34). Gerard Gennotte(1986), Optimal Portfolio Choice under Incomplete Information, *Journal of Finance*, 41(2), 733-746.

(35). Richard Hartman(1972), The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment, *Journal of Economic Theory*, 5, 258-266.

(36). Fumio Hayashi(1982), Tobin's q and Average q: A Neoclassical Interpretation, *Econometrica*, 50(1), 213-224.

(37). Burkhard Heer and Alfred Maussner(2005), *Dynamic General Equilibrium Modelling: Computational Methods and Applications*, Springer.

(38). Jason C. Hsu and Eduardo S. Schwartz(2003), A Model of R&D Valuation and the Design of Research Incentives, Anderson School, UCLA, Working Paper.

(39). Aubhik Khan and Julia K. Thomas(2003), Nonconvex Factor Adjustments in Equilibrium Business Cycle Models: Do Nonlinearities Matters?, *Journal of Monetary Economics*, 50, 331-360.

(40). Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve(1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second edition, Springer-Verlag.

(41). Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve(1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag.

(42). Tong S. Kim and Edward Omberg(1996), Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior, *Review of Financial Studies*, 9(1), 141-161.

(43). Nalin Kulatilaka and Enrico C. Perotti(1998), Strategic Growth Options, *Management Science*, 44(8), 1021-1031.

(44). Brt Lambrecht and William Perraudin(2003), Real Options and Preemption under Incomplete Information, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 619-643.

(45). John V. Leahy(1993), Investment in Competitive Equikibrium: the Optimality of Myopic Behvaior, *Quarterly Journal of Economics*, 108, 1105-1133.

(46). John V. Leahy and Toni M. Whited(1996), The Effects of Uncertainty on Investment: Some Stylized facts, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 28(1), 64-83.

(47). Jun Liu(2007), Portfolio Selection in Stochastic Environments, *Review of Financial Studies*, 20(1), 1-39.

(48). Robert E. Lucas, Jr and Edward C. Prescott(1971), Investment Under Uncertainty, *Econometrica*, Vol.39(5), 659-681.

(49). Sman Majd and Robert S. Pindyck(1987), Time To Build, Option Value, and Investment Decisions, *Journal of Financial Economics*, 18(1), 7-27.

(50). Robert McDonald and Daniel Siegel(1985), Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down, *International Economic Review*, 26(2), 331-349.

(51). Robert McDonald and Daniel Siegel(1986), The Value of Waiting to Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 101(4), 707-728.

(52). Robert C. Merton(1969), Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-time Case, *Review of Economics and Statistics*, 51, 247-257.

(53). Robert C. Merton(1971), Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, *Journal of Economic Theory*, vo.3, 373-413.

(54). Robert C. Merton(1973), An intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 41(5), 867-887.

(55). Mrtin Odening, Oliver Musshoff, Norbert Hirschauer and Alfons Balmann(2007), Investment under Uncertainty- Does Competition Matter?, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31, 994-1014.

(56). Bernt Øksendal(2007), *Stoshatic Differential Equations*, sixth edition, Springer-Verlag.

(57). Robert S. Pindyck(1982), Adjustment Costs, Uncertainty and the Behavior of the Firm, *American Economic Review*, 72(3), 415-427.

(58). Robert S. Pindyck(1988), Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm, *American Economic Review*, 78(5), 969-985.

(59). Robert S. Pindyck(1991), Irreversibility, Uncertainty, and Investment, *Journal of Economic Literature*, 29(3), 1110-1148.

(60). Robert S. Pindyck(1993), A Note on Competitive Investment under Uncertainty, *American Economic Review*, 83(1), 273-277.

(61). Han T.J. Smit and Lenos Trigeorgis(2004), *Strategic Investment: Real Options and Games*, Princeton University Press.

(62). Suresh M. Sundaresan(2000), Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment, *Journal of Finance*, 55(4), 1569-1622.

(63). Eduardo S. Schwartz(2001), Patents and R&D as Real Options, Anderson School, UCLA, Working Paper.

(64). Julia K. Thomas(2002), Is Lumpy Investment Relevant fot the Business Cycle?, *Journal of Political Economy*, 110(3), 508-534.

(65). Lenos Trigeorgis(1996), *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press.

(66). Marcelo L. Veracierto(2002), Plant-Level Irreversible Investment and Equilibrium Business Cycles, *American Economic Review*, 92(1), 181-197.

(67). Jessica A. Wachter(2002), Portfolio and Consumption Decisions under Mean-Reverting Returns: An Exact Solution for Complete Markets, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(1), 63-91.

(68). Helen Weeds(2002), Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition, *Review of Economic Studies*, 69, 729-747.