取引ネットワークのゲーム論的分析

増山　幸一
明治学院大学経済学部

Discussion Paper No.13-02
2013 年 10 月

取引ネットワークのゲーム論的分析

増山　幸一
明治学院大学経済学部

2013 年 10 月: in progress version

目次

1 序

経済学の伝統的な競争的均衡理論では、すべての売手は多数の市場で無匿名の買手と商品の取引ができると想定されている。しかし、現実の市場取引を観察すれば明白になるように、多くの財やサービスは自動車や住宅のように異質的な性格を有し、材料や部品などの中間投入財の取引に典型的に観察されるように、その取引にはある特殊な社会的関係が必要とされる。そして、取引相手を見出すための費用と可能性は、輸送コスト、社会的人間関係、情報や広告、技術的整合性や共同開発の機会などに大きく影響される。こうした現実の経済取引を十分に説明するためには、経済取引が主体間に巡らされた社会的ネットワークを介して行われることを明示的にモデル化する必要に迫られる。近年になって、経済活動をネットワーク的に連結した経済主体間の取引として明示的にモデル化する研究が急速に進み、経済的社会的ネットワークの経済分析と呼べる領域が深化しつつある。こうした領域での研究成果に関する包括的な解説書である Jackson(2008) は、この領域に興味を持つ研究者および大学院学生向けの代表的なテキストである。また、Goyal(2007) は経済ネットワークのゲーム論的分析に関してテクニカルな側面を深く解説したテキストである。Vega-Redondo(2007) は社会的ネットワークの特徴をテクニカルな側面を含めて、ネットワーク理論（グラフ理論）の枠組みに基づいて詳細に展開している[*1]。

本稿は、経済的ネットワークをゲーム理論的に分析する研究領域の重要な成果を解説し、今後の課題を提起し、将来の深化すべき方向性を考察する。本稿で用いるゲーム理論は、提携型ゲームの範疇に属する協力ゲーム、特に、マッチングゲーム、割当ゲームおよび交渉ゲームなどにおける枠組みと分析手法である。

次節で、買手ー売手のネットワーク・モデルを定式化する最初のステップとしてゲーム理論で割当問題と呼ばれるモデルを簡潔に整理し、それを踏まえて、買手-売手ネットワークの理論での研究成果を概観し、どのような新たな視点が必要とされ、いかなる問題が未解決になっているのかを明らかにする。第 3 節で、買手-売手ネットワークに卸売業者や貿易商などの中間業者が登場するとき、買手-売手ネットワークのリンク構造がどのように変化し、資源配分にどのような影響が生じるかを分析する。さらに、第 4 節で、各経済主体のネットワーク上における位置が経済的取引でのバーゲニング力にどのような効果をもたらすかを考察する。同時に、ネットワーク上におけるリンク構造が各プレイヤーの力関係や利得の取り分にどのような影響を与えるかについても、分析する。

2 買手-売手ネットワークの理論

2.1 2 項グラフにおけるマッチング

最初に 2 項割当問題を考える。学生寮の管理者が入学者に部屋を割り振る問題を考える。2 項グラフ左側のノードは学生寮の部屋からなり、部屋番号のラベルが付いている。右側のノードは入学者からなり、それには新入生の名前が付けられている。各ノードの間を結ぶリンクは、学生が入居したいと願っている部屋とその学生とを結んでいる。管理者は各部屋をその部屋に入居したいと望む学生 1 名に割り振らなければ、すべての部屋と学生とを 1 対 1 にマッチングできない。管理者は各ノードに接続するリンクを一本だけ選択し、それ以外のリンクを削除して、すべてのノードにただ一本のリンクだけが接続されているネットワークを作成する必要がある。この例では、部屋１０１に次郎、部屋１０２に三郎、部屋１０３に一郎、部屋１０４に花子、部屋１

[*1] Easley and Kleinberg(2010) は社会的経済的なネットワークの特徴を丁寧に解説した学部学生向けのテキストである。

０５に桃子を割り振ると丁度うまい具合に、部屋と学生が１対１にマッチングするネットワークができる。これを完全なマッチングという。

完全なマッチングとなっている割当ネットワークは、２項グラフの両サイドにあるノード数が同一であるとき、以下の２条件を満たす。(1) 各ノードは割当てられたノードとリンクで接続されている。(２) ２項グラフの右側に位置する各ノードとリンクされている左側にあるノードは複数個存在しない。つまり、完全なマッチングでは、各ノードのリンク先のノード数がただ一つになるようにリンク接続が選択されている。与えられた２項グラフが完全なマッチングを持つならば、その完全なマッチングを作成することは容易に示せる。

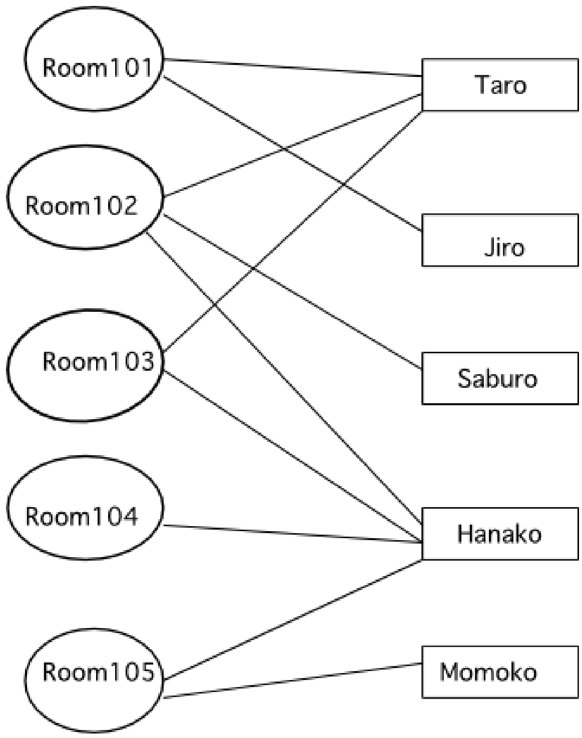

Fig.2.1　割当問題 1:　学生寮の部屋割当問題

しかし、２項グラフが完全なマッチングを持たないケースでは、完全なマッチングを作成できないという事実をどのようにすれば証明できるのだろうか。２項グラフにおいて、ある種の性質を持つノードの集合を考えることができる。これは圧縮された集合 (a constricted set) と呼ばれる集合で、「Fig.2.2 割当問題２. 圧縮された集合」の例に見られるように、太郎、次郎、三郎の 3 人からなるノードの集合である。この 3 人が入居を希望する部屋は 101 と 102 の２部屋である。２部屋に 3 人を割当てることは不可能である。完全なマッチングは不可能である。圧縮された集合と呼ばれる理由は、このような性質の集合が存在することが完全なマッチングの形成を制約するからである。一般的に圧縮された集合の定義は次のようになされる。２項グラフの右サイドにある任意のノードの集合を S とするとき、集合 S に属するノードとリンクされている左サイドの隣人ノードの集合を $N(S)$ とする。集合 S に含まれるノード数が集合 $N(S)$ のノード数より厳密に大きいならば、集合 S は圧縮されているという。圧縮された集合が存在する限り、完全なマッチングは形成できない。

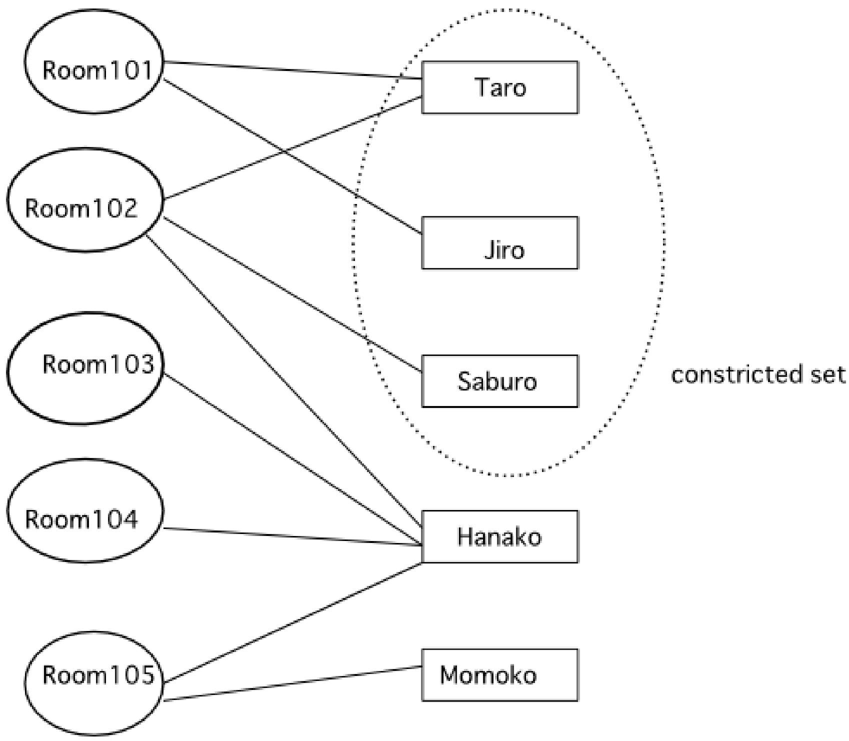

Fig.2.2　割当問題 2:　圧縮された集合

こうして以下の結果が成立つ。すなわち、もし右と左サイドに同数のノードを持つ２項グラフが完全なマッチングを持たないならば、この２項グラフは圧縮された集合を含んでいる。

以上の議論から、2 項グラフで完全なマッチングが成立するためには圧縮された集合が存在しないことであると予想できる。事実、以下のような結婚定理 (marriage theorem) として有名な定理が成立つことが知られている[*2]。

定理 2.1 (結婚定理)

2 項集合 $\{A, B\}$ *を持つ 2 項グラフ* G *において、集合* A *が完全マッチングを持つための必要十分条件は、すべての* $S \subseteq A$ *に対して、*$|N(S)| \geq |S|$ *が成立することである。ただし、*$|S|$ *は集合* S *の要素数である。*

ゲーム理論では、2 項グラフにおけるマッチング問題 (two-sided matching problem) の解は安定集合とコアとして与えられる[*3]。マッチング・ゲームは、通常、議論を明確にするために男性と女性の間の結婚問題としてモデル化されることが多い。結婚ゲームの数学的モデルは以下のように定式化される。有限な共通部分を持たない集合 M と W を考え、$M = \{m_1,\ m_2, \cdots, m_n\}$ は男性（あるいは企業、インターンの医師）の集合、$W = \{w_1,\ w_2, \cdots, w_p\}$ は女性（あるいは労働者、病院）の集合とする。男性は結婚相手としての女性にはある種の選好を持っており、同様に、女性も男性に対しての選好を有している。この選好関係は、マッチングする相手が好みの人物でない限り、結婚せず独身でいることを選択することも含む。男性 m が女性 w' よりも女

[*2] この定理の証明については、Diestel(2010) や Bollobas(1998) などのグラフ理論のテキストを参照のこと。Gale(1960) による証明は簡潔である。

[*3] マッチング問題および割当問題は、Gale and Shapley(1962) によってゲーム論の対象として分析され、その後、Shapley and Shubik(1971) によって新たな展開が開始された。これらの研究以降、割当問題は多くのゲーム論研究者によって研究され、発展してきた。詳しくは、Shubik(1984) や Roth and Sotomayor(1990) を参照のこと。

性 w を好むとき、$w \succ_m w'$ と表記する。同様に、女性 w が男性 m' よりも男性 m を好むとき、$m \succ_w m'$ と表現する。無差別なケースを含むときは、$m \succeq_w m'$ と表記する。

定義 2.1 (マッチンング関数)
結婚ゲームにおけるマッチング μ は、$\mu(m) \neq m$ ならば $\mu(m) \in W$ が成り立ち、かつ、$\mu(w) \neq w$ ならば $\mu(w) \in M$ が成立するという、*2* 条件を満たす集合 $M \cup W$ からそれ自身の上への写像である。ただし、マッチング μ は $\mu(\mu(x)) = x$ という *2* 階条件を満たさなければならない。$\mu(x)$ を x の相方（*mate)* と言う。

２つの異なるマッチング関数 μ と ν があるとき、m が $\nu(m)$ よりも $\mu(m)$ を選ぶときにのみ、m はマッチング ν よりも μ の方を選好する。このことは、男性 m の選好関係が他の男性のマッチング相手が誰かに依存しないことを意味する。$\mu(m) = w$ となっているとき、この組合せを両方の相方が互いに受け入れないならば、少なくともどちらか一人（m あるいは w）は独身でいることを選択する。このマッチング μ は不幸な人物によってブロックされていると言う。言い換えると、このようなマッチングは個人的合理性を満たさない。従って、このマッチング μ は、m が独身でいることを選好するが故に、実現しない。ここで、個人合理性に正確な定義を与える。

定義 2.2 (個人合理性)
マッチング μ は、各主体がこのマッチングの相方に受け入れ可能であるとき、個人的に合理的 *(individually rational)* である。言い換えると、それがいかなる人物によってもブロックされないならば、個人的合理性を満たす。

独身でいることを選択する可能性を認めているので、個人的に合理性を満たすマッチングは常に存在する。しかし、個人的合理性を満たすマッチングは複数存在する可能性がある。そのうち何れが望ましいのか。これに答えなければならない。マッチング μ では、男性 m と女性 w は相方となっていないとする。しかし、$w \succ_m \mu(m)$ であり、$w \succ_w \mu(w)$ であった。このとき、m と w はこの割当 μ をブロックしている。なぜなら、m は相方として w が割当てられているマッチングの方を選好する。

定義 2.3 (安定したマッチング)
マッチング μ は、それがいかなる人物あるいは男女のペアーによってもブロックされていないならば、安定している。

ここで疑問は、安定したマッチングが存在するのかということである。Gale and Shapley(1962) は、以下の定理によって、この疑問に答えを与えた。

定理 2.2 (Gale and Shapley)
すべての結婚ゲームにおいて、安定したマッチングが存在する。

この定理は、結婚ゲームで男女の意思決定が延期された受諾 (deferred acceptance) というアルゴリズムに従う場合を想定して、証明できる。延期された受諾アルゴリズムは以下の順番で交互に繰り返される。

(1) 各男性は受け入れ可能な選好リストの第一順位にある女性にプロポーズをする。
(2) 各女性は受け入れ可能でない男性からの提案を拒否し、複数の男性からのプロポーズを受けた場合には最も好ましい第一順位の男性からのプロポーズ以外のすべてのプロポーズを拒否する。この段階で、プロポーズが拒否されていない男性は婚約状態に維持されるという。

(3) 各段階で、プロポーズが拒否された男性は、自己のプロポーズを拒否していない女性で選好リストの最上位にある女性にプロポーズする。受け入れ可能な女性のすべてに対するプロポーズが拒否されたとき、プロポーズすることを終了し、独身でいることを選択する。
(4) 各段階で、各女性は受け入れ可能でない男性からのプロポーズを拒否し、今までプロポーズされた中で最も好ましい男性からのプロポーズ以外をすべて拒否する。
(5) 男性からのプロポーズの提案がなくなった段階で、アルゴリズムは終了する。この段階で、各男性は一人の女性とマッチングされるか、または、受け入れ可能な女性のすべてから拒否されている。

安定したマッチングが存在するとしても、複数個存在する可能性がある。通常、男性から見て望ましいマッチングと女性から見て望ましいマッチングは異なる。Gale and Shapley が証明したように、男性からプロポーズをするアルゴリズムによるマッチングは男性に取って望ましい割当を生む。他方で、女性からプロポーズするアルゴリズムによるマッチングは女性に取って望ましい割当を作成する。

安定したマッチングの概念は協力ゲーム理論でのコアの概念とどのような関係があるのだろうか。以下の定理がこの疑問に答える[*4]。

定理 2.3
結婚ゲームのコアは安定したマッチングの集合と一致する。

安定したマッチングは提携形ゲームにおける安定した集合と等価であるので、この定理は、コアと安定集合との関係を結婚ゲームに適用したものである。提携形ゲームの特殊ケースとなる結婚ゲームでは、安定集合とコアが一致することを主張している。

2.2 買手と売手の間の割当ゲーム

次に、現実経済で起きている実際の商品取引市場を考えてみよう。多くの商品の取引市場では、交換相手のマッチングがどのように実現されているのだろうか。この問題を考察するためには、人々の選好や評価価値に関わる概念の役割を導入する必要がある。例として、Easley and Kleinberg(2010) が用いた住宅売買の例を考えてみる。住宅を売却したい人と購入したい人が同数存在すると仮定する。買手 i $(i = 1, 2, 3, ...)$ が売手 j $(j = 1, 2, ...)$ が売ろうとしている住宅に対して付ける価値は v_{ij} であるとする。簡単化のために、売手の自己の住宅に付ける価値はゼロであるとする。売手 j は住宅市場で価格 $p_j \geq 0$ を提示して自分の住宅を売ろうとする。買手 i が売手 j のこの住宅を購入したとき、買手の利得は評価価値ー支払額= $v_{ij} - p_j$ となる。各買手はこの利得が最大になるような住宅を購入しようと努力する。当然、この利得がゼロ以下になるときは購入しない。

買手 i の利得 v_{ij} を最大化する売手 j が買手 i に選好された売手となり、この両者のノード間にリンクを張る。花子が付けた価格が２、桃子が付けた価格が 1、梅子が付けた価格が 0 になっているときの例が以下の Fig.2.3 のグラフで表されている。このグラフの例で、Valuations の列に書かれた（例えば、太郎の右側の）値は、花子、桃子、梅子の順番でそれらの住宅に対する買手の評価額を表す。太郎は花子の住宅を１２、桃子の住宅を４、梅子の住宅を２と評価している。太郎が花子から住宅を買うときの利得は１２－２＝１０、桃子から買うとき４－１＝３、梅子から買うとき２－０＝２なので、太郎により選好された売手は花子となるので、太郎と花子の間にリンクが接続される。次郎が花子から買うとき８－２＝6、桃子から買うとき７－１＝

[*4] 証明の詳細については、Roth and Sotomayor(1990) を参照のこと。

６、梅子から買うとき６－０＝６となり、次郎にとって花子から買うのも、梅子から買うのも、梅子から買うのも同じ利得となり、無差別である。3 本のリンクが張られる。三郎の利得は花子から買う時に最大になるので、三郎と花子の間にリンクが張られる。これを選好された売手グラフという。

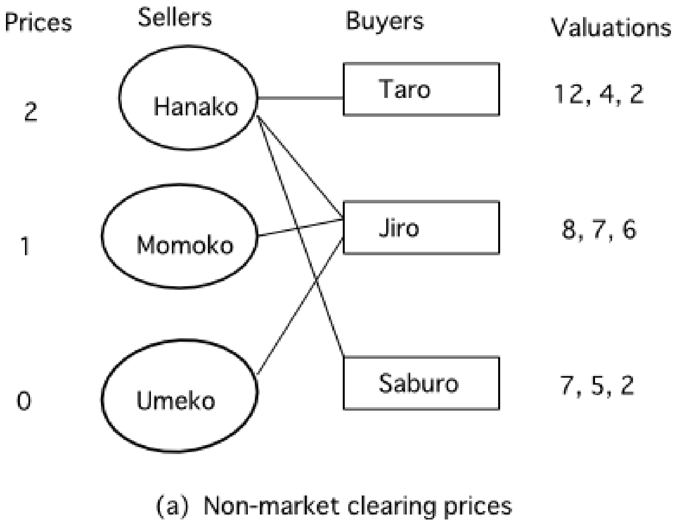

Fig.2.3　住宅売買 (a) 市場不均衡価格

この場合、明らかに、太郎と三郎からなる集合は制約された集合となり、完全マッチングが成立しない。つまり、市場での住宅取引で住宅を売れない売手と、買えない買手が出てしまう。

一般に、２項グラフで選好された売手と買手が一対一なっているときには、すべての売手も、すべての買手も希望どおりに取引を実現できる。この場合、住宅市場でのすべての取引は清算されている。市場均衡価格が成立しているということもできる。上記の住宅売買の例で、花子が売値を５に、桃子が２に増加させると、どうなるでしょうか。この結果は下の Fig.2.4 に示される。

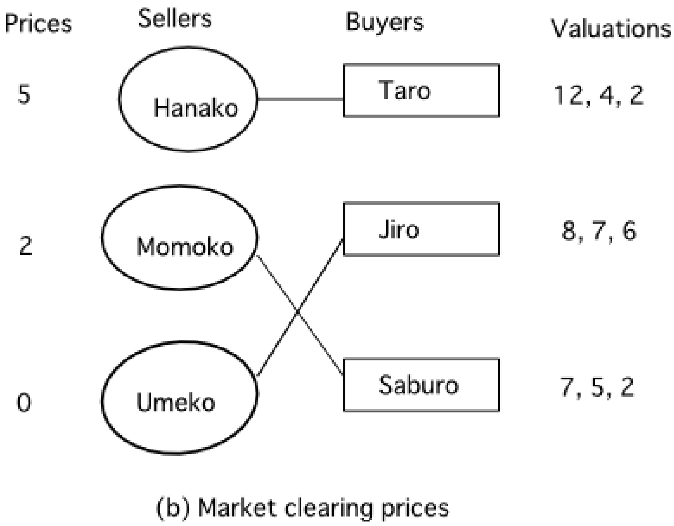

Fig.2.4　住宅売買 (b) 市場均衡価格

選好された売手のグラフで、完全マッチングが成立するとき、市場が均衡しているという。市場均衡を実現さ

せる価格はただ一つとは限らない。たとえば、花子が売値を 3、桃子が 1、梅子が 0 としたとき、完全なマッチングを形成することができるので、これも市場均衡となる。売手と買手の数が同数である 2 項グラフで、重要な事実は、買手のどのような評価額の組に対しても市場均衡価格が存在することを証明できる。後にこれを証明する。さらに重要なことは、市場均衡価格が社会的に最適な資源配分を実現するか否かということである。この問題に対しては簡単に答えを与えることができる。完全なマッチングは各買手の利得を最大化しているので、社会的利得はその総計であるから、社会的な利得を最大化している。市場均衡価格が成立するとき、選好された売手のグラフでの完全なマッチングは社会的に最適な配分を実現している。

以上の住宅売買市場の例は、ゲーム理論では、割当ゲーム (assigment game) と呼ばれる範疇に属する[*5]。結婚ゲームのような単純なマッチング・ゲームと異なる点は、マッチングが実現して成立する取引おいて、ある価値が当該マッチングから生まれ、その価値を 2 者間でどのように分配するかを決めなければならない点である。貨幣的分配 (monetary transfer、side payment) の問題が生じる。ここで、割当ゲームの一般的モデルを定式化する。例として、多数の売手と買手、多数の企業と労働者との間のゲームを考える。n 人からなる買手（あるいは企業）プレイヤーの集合を P、m 人の売手（あるいは労働者）プレイヤーの集合を Q とする。P 集合の i 番目の要素をただ単に i と表記し、Q の j 番目の要素をただ単に j で表現する。P と Q からの組合せ (i,j) は非負の実数 α_{ij} で表される価値の大きさを生み出すとする。この割当ゲームは譲渡可能な利得を持つ提携ゲームの形式 (P,Q,α) で表現できる。このゲームの特性関数は

(1) 任意の提携 $S=\{i,j\},\ i\in P,\ j\in Q$ に対して、$v(S)=\alpha_{ij}$、
(2) 提携 S が P の要素だけからなるとき、あるいは Q の要素だけからなるとき、$v(S)=0$、
(3) 任意の提携 $S=S_P\times S_Q,\ S_P\subset P, S_Q\subset Q$ に対して、$v(S)=\max\{v(i_1,j_1)+v(i_2,j_2)+\cdots+v(i_k,j_k)\}$、ただし、$k=\min\{|S_P|,|S_Q|\}$ である。

を満たさなければならない。

このゲームにおける分配 (imputation) は

$$\sum_{i\in P}u_i+\sum_{j\in Q}v_j=v(P\cup Q)$$

を満たす非負のベクトル $(u,v)\in R^n\times R^m$ となる。 ただし、u_i は買手プレイヤー i の利得、v_j は売手プレイヤー j の利得である。売手 j の自己の商品に対する留保価値が c_j であるとき、売手 j が販売する商品に対する買手の評価価値が v_{ij} であるとする。このとき、$\alpha_{ij}=v_{ij}-c_j$ となる。買手 i が売手 j に価格 p_j を支払うならば、$u_i=v_{ij}-p_j$、$v_j=p_j-c_j$ である。当然、$u_i+v_j=\alpha_{ij}=v_{ij}-c_j$ となっている。

プレイヤーの全集合 $U=P\cup Q$ から任意に作成された提携 S に対応する利得の中で、最大の利得が $v(P\cup Q)$ である。言い換えると、各プレイヤーはこの最大の利得の分配を巡ったゲームを行うことになる。従って、割当ゲームの分析は以下の線形計画 (LP) 問題 P_1 を解くことに帰着する。制約条件式

(a) $\sum_i x_{ij}\le 1,\ (i,j)\in P\times Q$
(b) $\sum_j x_{ij}\le 1,\ (i,j)\in P\times Q$
(c) $x_{ij}\ge 0,\ (i,j)\in P\times Q$

[*5] 古典派経済学者 Böhm-Bawerk が『資本の実証理論』の中で、価格理論を展開する際に馬を非分割財の例として用いたことから、ゲーム理論では住宅のような非分割財の取引市場を Böhm-Bawerk 市場と言う。

のもとで、目的関数

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot x_{ij}$$

を最大にする割当 x を見いだす。

制約式 (a) は各売手 j のマッチング相手は最大で一人になることを意味する。同様に、制約式 (b) は買手のマッチング相手はたかだか一人となっていることを意味する。マッチングの相手が存在しないときも含まれる。例えば、売手 j の割当相手がいないとき、$\sum_i x_{ij} = 0$ となる。買手 i の割当相手がいなければ、$\sum_j x_{ij} = 0$ である。つまり、x_{ij} は買手 i と売手 j がマッチングされる（パートナーとなる、提携相手となる）確率を表現する。線形計画法で周知の通り、この線形計画問題の解 (x_{ij}) は整数値、特に、ゼロと 1 だけからなる極値になる。従って、連続値線形計画問題 P_1 は、特性関数値 $v(P \cup Q)$ と対応する提携 S を決定する離散的割当問題と等価である。線形計画問題 P_1 の解を x^* と表記すると、$v(P \cup Q) = \sum \alpha_{ij} x^*_{ij}$ である。

線形計画問題 P_1 の解は最適割当と言われる。割当ゲーム (P, Q, α) における実行可能な割当は、上記の制約式 (a)、(b)、(c) を満たすゼロと 1 を要素とする行列 $x = (x_{ij})$ である。また、任意の実行可能な割当 x' に対して、

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot x_{ij} \geq \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot x'_{ij}$$

が成立するとき、割当 x は割当ゲーム (P, Q, α) において最適な割当であると言う。

定義 2.4 (実行可能な利得)

２つのベクトル $u \in R^n$ と $v \in R^m$ の対ベクトル (u, v) は、等式

$$\sum_{i \in P} u_i + \sum_{j \in Q} v_j = \sum_{i \in P, j \in Q} \alpha_{ij} \cdot x_{ij}$$

を満たす実行可能な割当 x が存在するならば、割当ゲーム (P, Q, α) の実行可能な利得である。

実行可能な割当 x と実行可能な利得 (u, v) は整合的であると言う。また、$((u, v,), x)$ を実行可能な結果 (feasible outcome) と言う。実行可能な利得の中には、パートナー関係とならないプレイヤーとの間に貨幣的移転が行われることも含んで、実行可能となっているケースも存在する。

定義 2.5 (安定な結果)

実行可能な結果 $((u, v,), x)$ が条件式

(1) $u_i \geq 0,\ v_j \geq 0,\ (i, j) \in P \times Q$

(2) $u_i + v_j \geq \alpha_{ij},\ (i, j) \in P \times Q$

を満たすならば、結果 $((u, v,), x)$ は安定な結果である。また、割当 x を伴う実行可能な利得 (u, v) は安定的であると言う。

条件（１）は、各プレイヤーがパートナーが割当てられない状態も許容される、つまり、$v(i) = v(j) = 0$ も起こりうることを意味する。条件 (2) は、(u, v) が別の割当によってブロックされないことを要求している。条件 (2) が満たされなければ、例えば、プレイヤー i が j 以外のプレイヤーと新しい提携を形成すると、より大きな利得を手に入れることができる。安定な結果が起こるとき、パートナー関係にないプレイヤーの間には貨

幣的移転は起きないことが知られている。パートナー関係を持たないプレイヤー i にとって、$u_i = 0$ となる。$x_{ij} = 1$ のとき、$u_i + v_j = \alpha_{ij}$ である。

線形計画問題 P_1 の双対問題を考えることができる。線形計画問題 P_1 の双対問題 P_1^* は以下のように定式化できる。制約条件式

(a*) $u_i \geq 0,\ v_j \geq 0,\ (i,j) \in P \times Q$

(b*) $u_i + v_j \geq \alpha_{ij},\ (i,j) \in P \times Q$

のもとで、目的関数

$$\sum_{i \in P} u_i + \sum_{j \in Q} v_j$$

を最小にする利得ベクトル (u, v) を見いだすことである。

線形計画法の双対定理から、問題 P_1 の目的関数の最大値と問題 P_1^* の目的関数の最小値は同一の値を持つ。従って、

$$\sum_{i \in P} u_i + \sum_{j \in Q} v_j = \sum_{(i,j) \in P \times Q} \alpha_{ij} \cdot x_{ij} = v(P \times Q) \tag{1}$$

が成立つ。このことから、結果 $((u,v),x)$ は実行可能な結果であり、さらに、安定性の条件 (1)、(2) も満たされているので、安定な結果になっていることがわかる。制約条件 (b*) から $u_i + v_j \geq v(i,j),\ (i,j) \in P \times Q$ であるので、いかなる提携 $S = S_P \times S_Q \subset P \times Q$ に対しても

$$\sum_{i \in S_P} u_i + \sum_{j \in S_Q} v_j \geq v(S) \tag{2}$$

が成立しなければならない。これらの条件式は安定集合がコアになっていることを示している。ここで、以下の定理が成立する[*6]。

定理 2.4 (Shapley and Shubik)

割当ゲーム (P, Q, α) を考える。このとき、

(1) 割当ゲーム (P, Q, α) のコアは、安定な結果の集合と一致する。

(2) 割当ゲーム (P, Q, α) のコアは、この割当ゲームに対応する双対線形計画問題の解集合である。

この定理から、最適な割当 x が安定な利得 (u, v) と整合的であることが分かる。また、$((u,v),x)$ が安定な結果であるならば、この割り当て x は最適な割り当てになっている。２つの結果 $((u,v),x)$ と $((u',v'),x')$ が割当ゲーム (P, Q, α) の安定な結果であり、もし $x'_{ij} = 1,\ u'_i > u_i$ ならば、$v'_j < v_j$ でなければならない。この性質は、P-プレイヤー（買手）と Q-プレイヤー（売手）の利害がコアの中で相反していることを意味している。つまり、割当ゲームのコアがいわゆるラティス構造 (lattice) になることが知られている[*7]。ラティス構造は以下のように定義される。

定義 2.6

部分的に順序づけられた集合 L は、その中の２つの要素 x, y が最小上限値 $x \vee y$ と最大下限値 $x \wedge y$ を持つな

[*6] Shapley and Shubik(1971) および Shubik(1984) を参照のこと。

[*7] コアがラティス構造になっていることについては、Demange and Gale(1985)、Roth and Sotomayor(1990) を参照のこと。効用関数が非線形のケースに対しては、Sotomayor(1999) を参照のこと。

らば、ラティス (*lattice*) という。さらに、L の各部分集合が L の中で最小上限値 sup と最大下限値 inf を持つならば、完備ラティス (*complete lattice*) という[*8]。

以下の定理が成立する。

定理 2.5
選好関係 $\succeq_P$ を持つ割当ゲームのコアは完備ラティスを形成する。この完備ラティスは選好関係 $\succeq_Q$ のもとで得られるレティス構造と双対の関係になる。

コアの中に含まれる利得には、多面体の頂点が存在して、そこでは一方サイドのプレイヤーが最大の利得を獲得し、他サイドのプレイヤーが最小の利得しか得られないようなことが起こる。一般的に言えば、どのような安定な利得 (u, v) に対しても、P-プレイヤーに取って最適な利得 $(\bar{u}, \underline{v})$、つまり、$\bar{u} \geq u,\ \underline{v} \leq v$ となる利得 $(\bar{u}, \underline{v})$ が存在する。同様に、Q-プレイヤーに取って最適な利得 $(\underline{u}, \bar{v})$ が存在する。

ここで、オークション過程を一般的にゲーム論のモデル内に導入する[*9]。取引される商品は不分割財で、売手と買手の間で 1 単位だけ取引される。u_i を買手プレイヤー i の利得、v_j を売手プレイヤー j の利得、売手 j の自己の商品に対する留保価値が c_j であるとする。売手 j が販売する商品に対する買手の評価価値が v_{ij} であるとする。このとき、$\alpha_{ij} = v_{ij} - c_j$ となる。買手 i が売手 j に価格 p_j を支払うならば、$u_i = v_{ij} - p_j$、$v_j = p_j - c_j$ である。実行可能な価格ベクトル p は、$p_j \geq c_j$ を満たす Q から R^+ への関数である。売手より買い手の数が多い場合、商品の中に価値ゼロ商品を販売する売手を加えることによって、買手数と売手の数を一致させることができる。この価値ゼロ商品を j_0 で表記し、その価値を $v_{i0} = 0$ とする。その価格はゼロである。買手がマッチング相方を見出せない場合、売手 j_0 が割当てられると想定する。こうして各買手は各商品に一対一に対応させることができる。価格 p が与えられるとき、買手 i の需要集合 $D_i\{p\}$ は

$$D_i\{p\} = \{j \in Q; v_{ij} - c_j = \max_{k \in Q}\{v_{ik} - c_k\}\}$$

と定義される。j が需要集合 $D_i(p)$ に含まれているとき、$\mu(i) = j$ となり、i がマッチング相手を持たないとき、つまり、$D_i(p)$ が空であるときに $\mu(i) = j_0$ となる関数 μ を作成する。これらの条件を満たす P から Q へのマッチング関数 μ が存在するとき、価格ベクトル p は競争的であると言う。この競争的価格 p のもとで、各買手はその買手の需要集合に含まれている商品の一つに割当てられているので、マッチング μ は価格ベクトル p と整合し (compatible) ている。

定義 2.7
価格ベクトル p が競争的であり、マッチング関数 μ が p と整合しており、そして、$\mu(p)$ に含まれていないすべての j に対して、$p_j = c_j$ になっているならば、価格と割当の対 (p, μ) は競争的均衡である。この価格ベクトルを均衡価格と言う。

従って、競争的均衡では、すべての買手がその買手の需要集合にあるいずれかの商品を購入しており、購入相手がいない商品の価格はその留保価値以下になっている。(p, μ) が競争的均衡であるならば、対応する利得 (u, v) は安定した利得になっている。競争的均衡のうち、買手に最適な（最も大きな）利得をもたらすような価格を最小均衡価格という。

[*8] sup は least upper bound（最小上限値）の省略形、inf は greatest lower bound（最大下限値）の省略形である。sup は記号 $\vee$ で、inf は記号 $\wedge$ で表現される。

[*9] 以下の定式化は、Demange, Gale and Sotomayor(1986) によって導入された。

市場均衡価格に到達する過程は、オークションにおける価格調整のストーリーと同じである。最初に、すべての売手が価格をゼロに設定する。この価格において、各買手が選好した売手のグラフを作成し、制約された集合が存在するかどうかをチェックする。制約された集合 A が見つかったら、それに対応する売手の集合 $N(A)$ を見いだす。集合 $N(A)$ に属する売手は超過需要に直面しているので、彼らの売り出している商品の価格を 1 単位分引き上げる。この新たな価格でオークションを続ける。制約された集合が存在する限り、この価格引き上げの操作を繰り返す。オークションが終了するとき、到達した価格のもとで買手は商品と一対一に対応した完全なマッチングが成立している。すなわち、均衡価格が成立している。この価格が最小均衡価格になっていることが証明できる[*10]。

定理 2.6 (最小均衡価格)
p を上記のオークション・メカニズムに従って到達した均衡価格ベクトルとし、q をそれ以外の価格調整によって得られる均衡価格ベクトルとする。このとき、$p \leq q$ である。さらに、p が最小均衡価格であるならば、(p, μ^*) が競争均衡になるようなマッチング関数 μ^* が存在する。

ここまで、買手が 1 単位の商品を売手から購入する割当ゲームにおける競争均衡の特徴を考察してきた。現実社会では、売手は複数個の商品を販売しようとするし、買手も複数個の商品を購入しようとする。こうした複雑な割当ゲームにおいても、若干の修正は必要であるが、上記の結論の多くは拡張されると推測される[*11]。これからの研究において解明されるべき未解決の案件でもある。

2.3 買手-売手のネットワーク

割当ゲームにおいては、買手は市場に参加するすべての売手を取引相手として選択して商品の売買ができるという可能性を暗黙のうちに仮定しており、買手と売手の間の提携形成と取引を同時的問題として取り扱ってきた。現実の経済取引では、買手と売手は何らかの取引関係（リンク接続）を形成しておかなければ、商品の売買取引を実現できない。エレクトロニクス産業に典型的に見られるように、部品メーカーと完成品メーカーとの間のネットワーク形成には互いにコストが必要とされる。例えば、買手と売手の関係を維持するためには、互いにカスタマイズされた部品の生産やその生産に特殊な設備が必要とされたり、追加的な資本設備や研究開発費用が発生する。買手と売手のリンクを維持するためにはリンク形成の費用が必要である。買手と売手の間を連結するリンク構造は各主体の経済的な動機に基づいて形成されて行く。リンクを形成することから生まれる便益からその費用を差し引いたネットの利得が最大になるように、買手の間で、あるいは、買手と売手の間で、リンク生成を巡る戦略的ゲームが行われる[*12]。

最初に、買手と売手の間のリンク構造が所与であるとき、いかなる性質の取引が実現されるのかについて考える。非分割財を 1 単位購入する買手が n 人存在し、同質な非分割財を 1 単位販売する売手が m 人いるとする。買手の集合を $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$、売手の集合を $\mathbf{S} = \{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ と表記する。買手は、特殊資産を介して取引リンクで接続された売手からのみ商品を買い入れることができる。各買手 b_i の商品に対する評価価値額を $v_i > 0$ とする。簡単化のために、売手は費用ゼロで商品を生産できるとする。買手 i と売手 j がリンクで連結されているとき、$g_{ij} = 1$ と表記し、リンク接続がないとき $g_{ij} = 0$ と表現する。買手-売手のネットワークパターンは、g_{ij} を要素とする行列 $G = (g_{ij})$ によって表現される。

[*10] 証明は、Demange, Gale and Sotomayor(1986) あるいは Roth and Sotomayor(1990) を参照のこと。
[*11] こうした方向での研究として、Bikhchandani and Ostroy(2002) を参照のこと。
[*12] 以下に説明する買手-売手ネットワークにおけるリンク生成のゲーム論的分析の多くは、Kranton and Minehart(2001) の研究結果に拠っている。

買手 i が売手 j から財を購入したとき、$a_{ij}=1$ と表記し、財を購入しないとき $a_{ij}=0$ と表現する。a_{ij} を i 行 j 列とする行列を A とする。どの買手がどの売手から財を購入したかを記述するので、財の配分（行列）と呼ぶ。$a_{ij}=1$ が実行可能であるためには、$g_{ij}=1$ が成立していなければならない。また、いかなる買手も複数の売手から財を購入することはできないので、行列 A の各行には 1 の値が入るセルはただ一つしかないし、各列でも同様である。こうした条件を満たす財の配分 A を実行可能な配分という。前節で説明した結婚定理を用いれば、所与のネットワーク・パターンのもとで、いかなる配分が実行可能であるかを判定することができる。

買手が売手から財を購入して初めて経済的余剰が生まれる。費用ゼロで生産可能なので、この余剰の大きさは買手の財に対する価値評価額にのみ依存する。買手の価値評価額のベクトルを $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ と表記する。配分 A が実現することによって生まれる経済的余剰の大きさ $w(v,A)$ は、

$$w(v,A)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}v_i a_{ij}$$

と表現できる。実行可能な配分の中で、経済的余剰を最大にする配分を効率的配分 (efficient allocation) とよぶ。効率的配分を $A^*(v;G)$ と表記する。従って、所与のネットワーク・パターンのもとで実現可能な経済的余剰の最大値は $H(G)=w(v,A^*(v;G))$ と表現できる。

ネットワーク・パターンが所与のもとで、市場競争の結果、どのような性質の財配分と均衡価格になるのだろうか。また、リンク・パターンの変化が財配分と均衡価格および余剰の分配にどのような影響を及ぼすのだろうか。これらを分析するために、前節で説明したオークション過程を介した競争過程を取り上げてみる。以下の図に見られる例を取り上げてみる。買手の評価価値が $v_1>v_2>v_3>v_4>v_5>0$ となっているとする。ネットワークのリンク・パターンを無視したとき、経済的余剰が最大になるのは、買手 $b_1,\ b_2,\ b_3$ が商品を購入するケースである。しかし、この例でのリンク・パターンでは、この配分は実現できない。なぜなら、結婚定理から、3 人の買手 $b_1,\ b_2,\ b_3$ の部分集合 $\{b_1,b_2\}$ が条件 $N(\{b_1,b_2\})\geq 2$ を満たさないので、この 3 人の買手すべてに売手を割当てることは不可能である。一方、買手の集合 $\{b_1,b_3,b_4\}$ を考えるとき、この集合は結婚定理の条件を満たすので、この 3 人の買手に売手を一人ずつ割り振ることができる。

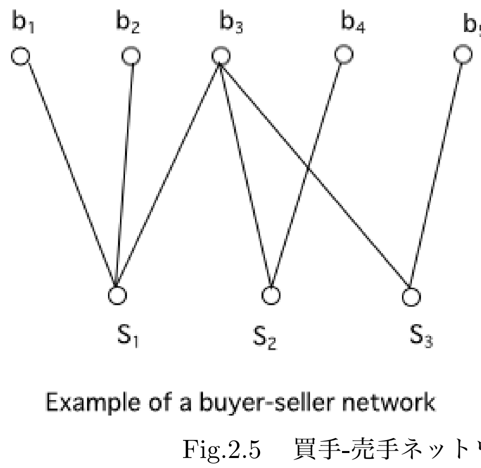

Fig.2.5　買手-売手ネットワークの例

オークションが開始され、価格がゼロのとき、すべての買手は商品を買いたいと申し出る。価格が $p=v_5$ に引き上げられると、買手 b_5 はオークションから退出する。このとき、売手 S_1 と S_2 に対する買手は $b_3,\ b_4$ の二人との組合せが実行可能な配分となり、商品は価格 $p=v_5$ で取引される。買手 b_3 は売手 S_3 から商品を

購入し、b_4 は S_2 から買う。この段階では、二人の買手 b_1, b_2 が残っている。S_1 に対する超過需要の状態なので、価格が引き上げられる。価格が $p = v_2$ になるまでは、超過需要となっている。価格が $p = v_2$ に到達すると、買手 b_2 はオークションから退出する。この結果、買手 b_1, b_3, b_4 に売手 S_1, S_3, S_2 の商品が配分される。これは効率的な配分となっている。

この例から分かるように、ネットワーク競争のモデルでは、リンク制約のもとで、商品に最も高い評価を与える買手が商品を購入している。リンク・パターンが所与のもとで、効率的な配分が実現される。また、買手と売手が互いの相方を変化させることによって、より大きな余剰を獲得することができない。つまり、対安定 (pairwise stable) である。この結果は以下の定理として表現することができる。

補題 2.1 (効率的配分と対安定性)
ネットワークのリンク・パターンが所与のもとで、オークション過程を介した財の均衡配分は効率的であり、その財配分と価格は対安定である。

次に、リンク接続の形成問題を 2 段階ゲームを用いて考察する。複数の買手が一人の売手の生産能力をシェアするとき経済的便益が生まれると仮定される。この経済便益をシェアリングの経済 (economies of sharing) と呼ぶ。売手の生産能力を形成するためには費用がかかることより、複数の買手がこの費用をシェアする方が効率的であること、および、買手間に評価価値額にバラツキがあることにからも、売手数よりも買い手数の方が多いことからある種の便益が発生する。この理由から、買手数よりも売手数の方が少ないと仮定する。(各売手が同質財を同一技術で生産して、1 単位の商品を販売しているという仮定は維持されている。)

最初に (第一段階で)、各買手がリンクの接続先を選択する。リンクを接続・維持するには、各リンク当たり $c > 0$ の費用がかかる。各買手の主体的なリンク形成の結果、ネットワークのリンク・パターン G が決まる。ここで、各買手はリンク接続や取引価格などに関して長期的条件付き完備契約を結ぶことができないと、暗黙に仮定されている。リンク接続において特殊資産の形成のための投資が必要とされるとしても、需要量などに短期的な不確実性は除去されないと仮定する。

第 2 段階目で、各買手はリンク先の商品の評価価値を認識し、オークションに参加する。オークションの結果として生じる均衡配分から得られる (期待) 利得を計算することができる[*13]。リンク・パターン G を与えたときに予想できる買手の期待利得の大きさを $V_i^b(G)$ と表記し、売手の期待利得の大きさを $V_j^s(G)$ と表現する。買手 i の純利得、つまり利潤は利得マイナス費用なので、$\Pi_i^b(G) = V_i^b(G) - c\sum_{j=1}^m g_{ij}$ である。売手 j の利潤は、$\Pi_j^s(G) = V_j^s(G)$ となる。(商品は費用ゼロで生産できると仮定されている[*14]。)

リンク・パターン G のもとで、市場全体での純経済的余剰 $W(G)$ は経済的余剰 $H(G)$ −リンク費用だから、

$$W(G) = H(G) - c\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g_{ij}$$

と定義される。リンク・パターン G があらゆるリンク構造の中で純経済的余剰を最大にするパターンであるならば、この G は効率的リンク・パターンである。

このゲームの完全ベイジアン均衡を考察する。買手 i のリンク接続先の選択は、他のプレイヤーの戦略を与えたとき、i の期待利潤を最大にする。リンク・パターン G^* が均衡戦略となるための必要十分条件は、各買手 i が任意のリンク接続 g_i に対して純利潤 $\Pi_i^b(g_i, g_{-i})$ を最大にする戦略 g_i^* を選択していることである。つ

[*13] 商品に対する評価価値が確率変数である場合、この期待利得は評価価値の確率分布を用いて計算する。
[*14] 生産能力を建設するために投資費用が必要となるとき、売手数は所与ではなく、モデル内で内生的に決定されることになる。

まり、最適戦略 g_i^* は

$$V_i^b(g_i^*, g_{-i}^*) - c\sum_{j=1}^{m} g_{ij}^* \geq V_i^b(g_i, g*_{-i}) - c\sum_{j=1}^{m} g_{ij}$$

を満たしている。ここで、$g_i = \{g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{im}\}$ であり、g_{-i} は買手 i 以外のプレイヤーが採用するリンク接続に関する最適戦略の組である。

上で説明した通り、ネットワークのリンク・パターンが所与のとき、買手間のネットワーク上での競争は、オークション過程を経て、財が効率的に配分される状態を実現し、社会的経済余剰は最大になる。各買手が支払う価格は財の社会的機会費用に等しいので、各買手の純利潤が社会的経済余剰への貢献の大きさになっている。これを表現した結果が以下の命題である。

補題 2.2
リンク・パターン G を考える。この G から買手 i のリンクのうち任意のリンクを取り除いてできたリンク・パターンを G' とする。このとき、リンク・パターン G での買手 i の期待利得とリンク・パターン G' での期待利得の差は、経済的余剰の差に等しい、つまり、$V_i^b(G) - V_i^b(G') = H(G) - H(G')$ である。従って、買手 i の純利潤の差は社会全体での純経済余剰の差額に等しい、つまり、$\Pi_i^b(G) - \Pi_i^b(G') = W(G) - W(G')$ が成立つ。

この命題の意味を例を用いて説明する。以下のグラフの例は、上で取り上げたネットワークの例で買手 b_4 と売手 S_3 の間のリンクを削除した場合を描いている（削除されたリンクは点線で表現されている）。このリンクが削除される前のネットワークでは、経済的余剰は $H(G) = v_1 + v_3 + v_4$ となっていた。このリンクが削除された後のネットワークでは、買手 b_5 が売手 S_3 から価格 v_5 で商品を購入し、買手 b_3 が売手 S_2 から価格 v_3 で購入する。買手 b_4 は商品を購入できない。このとき、経済的余剰は $H(G') = v_1 + v_3 + v_5$ となるので、リンク削除の結果、経済的余剰が $H(G) - H(G') = v_4 - v_5$ の分減少する。買手 b_3 の期待利得は $V_3^b(G) = v_3 - v_5$ から $V_3^b(G') = v_3 - v_4$ に減少する。買手 b_3 の利得の減少額は $v_4 - v_5$ となる。従って、$V_3^b(G) - V_3^b(G') = H(G) - H(g')$ となり、$\Pi_i^b(G) - \Pi_i^b(G') = v_4 - v_5 - c = W(G) - W(G')$ が成立つ。

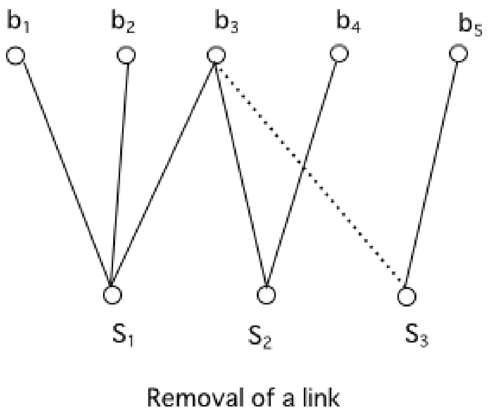

Fig.2.6　ネットワークのリンク削除の例

この命題の帰結として、各プレイヤーが自己の期待利潤を最大にする戦略を選択する限り、いかなるリンク形成費用 $c > 0$ に対しても、効率的リンク・パターンはリンク接続ゲームの完全ベイジアン均衡の結果になる。しかし、この結果は、ゲームの均衡の一つが効率的なネットワークに一致するケースがあり得ることを示

しているが、ゲームの均衡が必ず効率的なネットワークになることを意味しない。リンク接続費用がある閾値以下になる場合のみ、リンク接続ゲームの均衡が効率的ネットワークになることが知られている[*15]。

ここで、LAC(least-link allocatively complete) ネットワークについて定義する。買手集合 $\mathbf{B}$ のすべての部分集合のなかで、そのサイズが買手数 $m = |\mathbf{S}|$ と等しいサイズを持つ部分集合 A を取り出したとき、この部分集合 A に属するすべての買手が商品を購入できるような財配分が実行可能ならば、このネットワークは配分完備 (allocatively complete, AC) であると言う。当然ながら、すべての買手がすべての売手にリンク接続していれば、最も高い評価額を持つ買手がすべて財を買うことができて、完備な配分は実現する。ネットワークは効率的であり、シェアの経済が発現している。リンク接続費用がゼロであれば、効率的なネットワークが形成されるであろう。しかし、リンク接続費用が大きくなるにつれて、すべての買手がすべての売手にリンク接続しているネットワークは効率的であるとは限らない。より少ないリンク数で完備な配分を実現できるネットワークが存在する。LAC とは、配分完備なネットワークのなかで最も少ないリンク数をもつネットワークのことを指す。

定理 2.7 (効率的ネットワーク)
ネットワーク上の売手と買手の数は所与であるとする。買手-売手ネットワークが LAC ネットワークになっているとき、各売手は厳密に $n-m+1$ 人の買手とリンク接続している。リンク接続費用がある閾値以下であるとき、LAC ネットワークは効率的ネットワークであり、効率的ネットワークだけがゲームの完全ベイジアン均衡の結果となる。

この定理に従えば、5 人の買手と 3 人の売手からなる買手ー売手ネットワークにおいて、LAC ネットワークであるためには、各売手は $5-3+1=3$ 人の買手とリンクでつながっている。ある買手は一人の売手と接続しているかもしれないが、ある買手は 3 名の売手と接続しているかもしれない。買手が何名の売手とリンク接続しているかは重要ではなく、売手が何名の買手にリンク接続しているかが重要となる。

以上の結果は、売手の数が所与であるとき、つまり、売手の生産能力形成への投資に費用がかからないケースにおいて成立する結論である。生産能力への投資費用が必要とされる場合、取引ネットワークに参加しようとする売手の数は経済的動機に従って内生的に定まる[*16]。取引ネットワークに参加することから得られ利得（販売価格）が生産能力形成への投資費用を越える場合にのみ、売手は投資を実行する。反対に、投資費用が買手の評価額を下回ると予想されるとき、売手は投資を行わない。買手は売手が生産のための投資を実行すると期待できる場合にのみ、その売手との取引関係（リンク形成）に投資しようとする。社会的に効率的水準での投資を実現するために十分な経済的便益を得られないと予想するとき、売手は効率的な投資を行わず、買手は売手が生産設備への投資をしないと予想するので、その売手へのリンクを形成しない結果、効率的なリンク構造を持つ取引ネットワークの形成に失敗する可能性が存在する。効率的ネットワークが必ずしもゲームの均衡にならない。

[*15] 以下の定理の証明の詳細は、Kranton and Minehart(2001) を参照のこと。
[*16] 売手が 1 単位の商品ではなく複数個の商品を生産販売する場合には、極めて重要な経済動機とななる。

3　中間業者と取引のネットワーク

3.1　取引ネットワークの例

金融資産市場での取引に見られるように、売手と買手は互いが直接的に相対して取引することはしない。売手と買手は取引を仲介するブローカー、中間業者、取引所などの取引業者 (traders) を介して売買を行っている。取引業者を介して行われる商品の売買ネットワークを理解するために、発展途上国などにおける農産物の取引ネットワークを例として取り上げる[17]。流通環境の貧弱さや農産物の腐敗し易さおよび農家の貧弱な資金力などの要因により、各農家は特定の取引業者に販売する以外のすべがない。同じように、消費者は特定少数の取引業者から農産物を買うしかない。農家 i は 1 単位の農産物を所有しており、それを価格 v_i 以上で売りたいと思っている。消費者 j はその農産物の価値を v_j と評価しているので、価格 v_j 以下でその農産物 1 単位を買いたいと思っている。各消費者は 1 単位の農産物を購入するつもりで、2 単位以上は買いたくない。過去の取引の歴史から、各買手、売手、および取引業者はこれらの評価額をすべて知っていると仮定する。

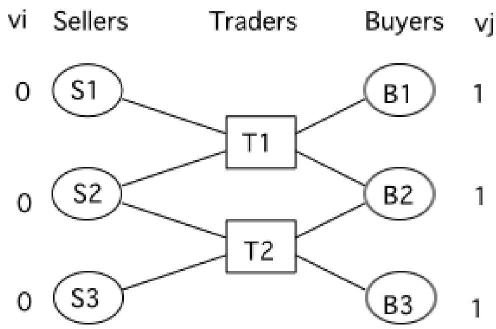

Fig.3.1　取引のネットワーク例 (a)

Fig.3.1 の取引ネットワークの例 (a) では、3 名の売手と 3 名の買手、そして 2 名の取引業者が存在するが、地理的な要因から、農家 1 (S1) は取引業者 1 (T1) としか取引できない。農家 2 (S2) は取引業者 1 (T1) と取引業者 2 (T2) の両者に販売できる。農家 3(S3) は取引業者 2 (T2) としか取引できない。農家が要求する最低価格は vi の列に明記されているように、ゼロとする。消費者が付ける評価額は vj の列に示されている通り、1 である。簡単化のために、ここでは、各農家の評価額は同一、消費者の評価額も同一になっているが、この仮定を緩めても議論の本質は関係しない。取引は取引業者が価格を設定することから始まるゲームである。取引業者 t は売手 i に買値 (bid price)b_{ti} をオファーする。買手 j に対しては、売値 (ask price)a_{tj} をオファーする。この取引業者のオファーに反応して、売手と買手は最適な戦略を選択する。第一段階で取引業者が戦略を選択し、第 2 段階で売手と買手が戦略を選択するという、2 段階ゲームの構造をしているとする。2 段階ゲームの解はサブゲーム完全均衡 (subgame perfect Nash equilibrrium) として通常与えられる[18]。

[17] 以下の例は、Easley and Kleinberg(2010) が用いた例に依拠している。
[18] サブゲーム完全均衡の概念については、ゲーム理論のテキスト参照のこと。

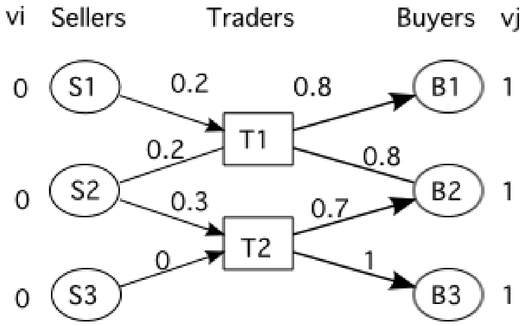

Fig.3.2　取引のネットワーク例 (b)

Fig.3.2 の取引のネットワーク例 (b) では、T1 は売手 1 と 2 に価格 0.2 の買値をオファーし、買手 1 と 2 に価格 0.8 の売値をオファーしている。T 2 は売手 2 に価格 0.3 を、売手 3 に価格 0 をオファーし、買手 2 に価格 0.7、買手 3 に価格 1 をオファーしている。これらのオファーを受け取った、売手 1 は T1 に売る以外にすべがないので T1 に農産物 1 単位を販売する。売手 2 は高い価格 0.3 をオファーした T2 に販売する。売手 3 は T2 に販売するしかないので、言い値通りに T2 に売る。買手 1 は T1 からしか買えないので、価格 0.8 で購入する。買手は 2 は T1 と T2 のどちらかかでも買えるので、安い価格 0.7 をオファーした T2 から買う。買手 3 は T2 からしか買えないので、価格 1 で買う。この結果、矢印がついた方向に農産物が販売されて行く。取引業者 1 の利益は 0.8-0.2=0.6、業者 2 の利益は 0.7+1-0.3-0=1.4 となっている。売手の利得は 0.2+0.3+0=0.5、買手の利得は総計で 1–0.8+1-0.7+1-1=0.5 である。

ここで示された各取引業者の戦略は最適な戦略になっているだろうか。T1 は T2 よりも低い買値を売手 2 にオファーした結果、売手 2 から商品を購入できなかった。T1 が T2 のオファー価格よりの高い、例えば、買値 0.4 を売手 2 に提供すれば、売手 2 から商品を購入できて、買手 2 に T2 よりも安い売値、例えば、0.6 を提供すれば、買手 2 に商品を売ることができる。この結果、取引業者 1 はより大きい利益を手に入れることができる。また、買手 1 は T1 からしか買えないので、買手 1 に対する売値価格のオファアー額を買手 2 と同じにする必要がない。買手 1 にオファーする売値を 1 とすることは可能である。さらに、業者 1 は売手 1 が販売できる相手が自分しかいないので、最低限の価格 0 をオファーすれば良い。このような戦略は例 (b) で得られる業者 1 の利益を大きく増加させる (1+0.6-0.4-0=1.2)。これを描いたネットワークが下に示されている。

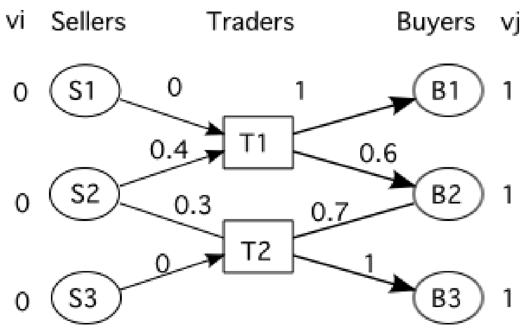

Fig.3.3　取引のネットワーク例 (c)

第一段階でのゲームは取引業者 1 と取引業者 2 との間の同時手番ゲームになっている。このゲームでは、一つの取引業者としか取引できない独占される状態にある売手や買手は考慮に入れる必要はない。売手には最低価格を、買手には評価額そのものをオファーすれば良い。複数の取引業者と取引できる環境にある売手や買手

を各業者が取り合うゲームとなっている。このゲームの解はどのような性質を持つのでしょうか。ライバル業者が存在するとき、同一の買値または売値を提示しないと取引相手がライバルに奪われてしまう。各競合業者が買手（売手）に同一の売値（買値）を提示することは、競争が進展するに連れて、各業者の買値と売値は同一になり、利益がゼロに収束して行くことを意味する。言い換えると、競争均衡では、各取引業者の利益はゼロである。ただし、独占状態にある売手と買手からの利益は正となっている。この結論は、各買手の評価額が同一のケースで成立する。各買手の評価額が異なる一般的なケースでは、均衡価格はどのように形成されるのでしょうか。売手が一人の場合には、取引ネットワークにおける均衡価格は第２価格オークション (second-price auction) と同じ結果になる。この結論を証明することは簡単である。

取引ネットワークにおいて、買手（売手）と取引業者とのリンク接続が複雑化するとき、各経済主体の利得にどのような効果をもたらすのか、社会的厚生は増大するのでしょうか。この問題に答えるに当たって、以下のグラフで示された例を取り上げる。

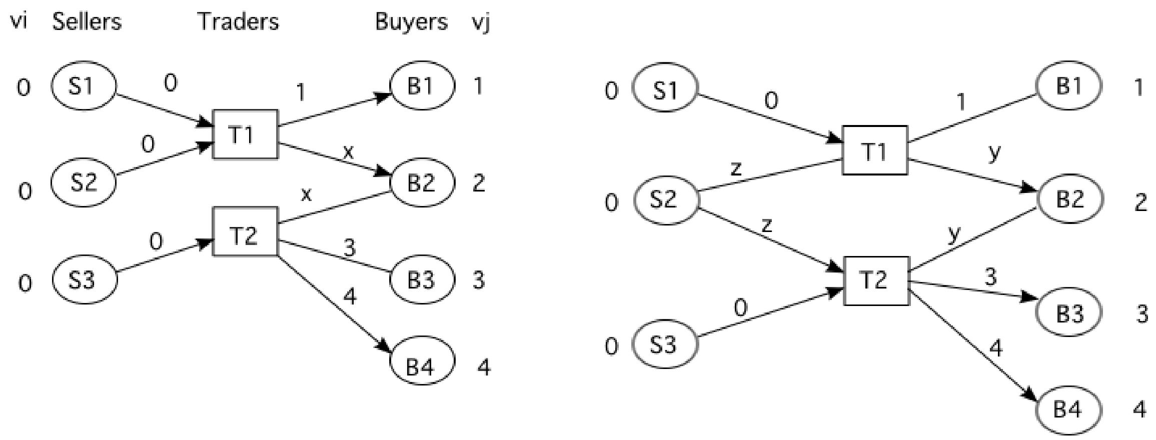

Fig.3.4　取引ネットワークにおける接続の複雑化

左側のグラフでは、売手２は販売先が業者 T1 に独占されているが、右側のグラフでは売手２の販売先が複数存在する。売手２が T1 に独占されている状態では、T2 は売手２から商品を買い入れることはできない。買手２は両方の取引業者から購入できるので、各業者が買手２に商品を売るためにはライバルよりも安い価格を提示する必要がある。売手２が複数の販売先をもつケースでは、各取引業者は売手２から商品を買い入れるためには、ライバルよりも高い買値を提示する必要がある。両業者が同一の買値 z を提示して、売手２が T2 に販売したとする（T2 は買値に若干色をつけたとする。）。このとき、T2 はこの仕入れた商品を買手３に価格３で販売するであろう。T1 は売手１からしか商品を買い入れられないので、商品に高い評価を与える買手２に売ろうとするであろう。これが取引パターンの均衡状態になる。T1 と T2 がオファーする買値 z は１と３の間に入り、買手２にオファーする売値 y は１から２の間になる。

売手２の販売先が取引業者１に独占されている状態から、売手２と取引業者２の間に取引リンクが確立されると、商品の流通経路が劇的に変化する。売手２から T2 への流通経路にボトルネックが存在するとき、商品に高い価値を持つ買手３はこの商品を手に入れることができない。つまり、資源配分にロスが生じている。このボトルネックが解消されると、資源配分が効率化して、社会的厚生が増大する。

また、売手２から T2 への流通経路のボトルネックが解消されると、売手２の販売先が拡大し、T2 の購入先も拡大する。その結果、売手２と取引業者２の利益が増加する。このことは、取引業者２および売手２がこの流通経路のボトルネックを解消させる動機、言い換えると、両者の間にリンク接続を維持する経済動機が存

在することを意味する。ネットワークにおけるリンク接続の戦略的形成の問題が重要となる。

3.2 中間業者と取引ネットワークのモデル

買手と売手が直接的に取引できず、買手と売手が卸売業者のような中間取引業者を介してのみ売買できる取引ネットワークのモデルを定式化することを試みる。以下で定式化するモデルは Blume, et al.(2009) の研究に依拠している[*19]。買手の集合を B、売手の集合を S、中間業者の集合を T と表記する。取引ネットワーク上のリンクは、買手または売手の集合 $B \cup S$ の中のノードと、中間業者の集合 T の中のノードとを接続している。各リンク（枝）は (i,t), $i \in B, t \in T$ または (j,t), $j \in S, t \in T$ という形式で表現できる。取引はネットワーク $(B \cup S \cup T, g)$ 上で行われる。ここで g はリンク接続パターンの集合である。$g_{ij} \in g$ はノード i とノード j の連結程度を表現し、$g_{ij} = 1$ のとき、リンク接続が存在する。売手と買手は直接的に売買ができないので、$i \in S, j \in B$ であるとき、必ず $g_{ij} = 0$ である。

取引される財は同質財あるいは非同質財で、売手が保有しているとする。買手は異なる財には異なる評価額を付ける。異なる買手は同質財に対しても異なる評価を与えることもあり得る。財に対して売手が付ける留保価値は売手の好みに依存している。

基本的モデルでは、簡単化のために、取引される財は単一の財（同質財）で、各売手はそれを 1 単位保有していると仮定する。買手、売手および中間業者の効用関数は貨幣額の線形関数であるとする。貨幣の限界効用は 1 とする。1 単位の財を受け取るときの買手または売手 $i \in B \cup S$ の効用値は θ_i とする。各主体は 1 単位以上の財を消費しないので、2 単位以上の限界効用はゼロである。財の初期配分と各主体の財に対する評価値はゲーム参加者の共通知識である。また、各主体 i は財に対する自己の評価値 θ_i よりも大きい貨幣額を保有しているとする。

各財は売手から中間業者、そして中間業者から買手という流通経路を経て、売手から買手に渡る。このような取引は以下のようなゲームを介して実現する。各中間業者 t は、ネットワーク上で接続されている売手 $S(t) = \{i \in S; g_{ti} = 1\}$ に買値 (bid price) をオファーし、ネットワーク上で接続されている買手 $B(t) = \{i \in B; g_{tj} = 1\}$ に売値 (ask price) をオファーする。中間業者は各売手および各買手の評価額を知っているので、各主体に対して異なる価格をオファーできる。売手 i に提供された買値を β_{ti}、買手 j に提供された売値を α_{tj} と表記する。

中間業者のこのオファーに対して、売手および買手は最も望ましい価格を提示した中間業者を選択することができる。各売手 i に取って、中間業者 t を選んだとき、効用値は買値 β_{ti} となり、誰とも取引しないことを選択すれば効用値は θ_i となる。売手は $\beta_{ti} > \theta_i$ のときにのみ、利得は正となるので財を販売する。このとき、売手は財 1 単位を販売して貨幣量 β_{ti} を受け取る。各買手 j にとって、中間業者 t を選んだとき、利得は $\theta_j - \alpha_{tj}$ となり、財を購入しないときは利得はゼロである。中間業者 t のオファーを受託した売手の集合が $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$、買手の集合が $\{j_1, j_2, \ldots, j_b\}$ であるとき、この業者の利得は

$$\sum_r \alpha_{tj_r} - \sum_s \beta_{ti_s}$$

と表現できる。ただし、買手の数が売手の数を越えるときに、契約不履行となるので、業者はある種のペナルティを課されると想定される。このペナルティの値が十分大きければ、均衡ではこのような状態は起きない。

[*19] Gale and Kariv(2007) は金融資産市場における取引ネットワークにおける中間業者の役割を導入しているが、中間業者が市場参加者の中からランダムに選択され想定になっているので、買手と売手が中間業者を通してのみ取引できるネットワークのモデルではない。

以下の議論ではこれを仮定する。

このゲームは 2 段階展開形ゲームなので、均衡概念はサブゲーム完全均衡として与えられる。均衡で、各中間業者がオファーする買値と売値の集合、各売手が選択する戦略、各買手が選択する戦略が特定され、各財の流通経路が確定する。すなわち、資源配分の状態が特定される。

この基本的モデルでは、財が同質財であるという仮定が前提とされている。この仮定を弱め、モデルを非同質財に拡張することは容易である。売手と買手の組合せに依存して評価が変化するので、買手 j が売手 i が保有している財を購入したときに得られる効用を θ_{ji}、売手 i が買手 j に財を販売するときに売手が失う効用の大きさを θ_{ij} と表記する。このとき、中間業者がオファーする買値および売値はベクトルの形式で提示される。例えば、取引業者 t は $j \in B(t)$ に売値ベクトル $\alpha_{tj} = \{(\alpha_{tji})\}$ を提示し、売手 $i \in S(t)$ に買値ベクトル $\beta_{ti} = \{(\beta_{tij})\}$ を提示する。ここで、α_{tji} は取引業者 t が売手 i の財を買手 j に販売するとき提示する売値価格を、同様に、β_{tij} は買手 j に販売するとき売手 i に提示する買値価格である。

各売手と各買手に提示する価格が不等式 $\beta_{tij} \leq \alpha_{tji}$ を満たすとき、非横断的戦略 (non-crossing strategy) と言う。ゲームの均衡は、各取引業者の戦略が非横断的戦略になっているときの、サブゲーム完全（ナッシュ）均衡である。均衡で非横断性条件が成立することを課す理由は、取引業者の利得が負になるような取引を排除するためにである。社会的に最適な取引とは、それが以下の輸送問題の最適解になっているときをいう。つまり、買手から売手への財の輸送の中で、取引の社会的価値を最大化するような配分を求める線形計画問題の解になることである。

二項グラフ $G = (B \cup S, E)$ を考える。リンクの集合 E は、(i, j) という形式で表現されたリンクの集合で、以下の条件を満たすような売手と買手を結ぶリンク枝からなる。売手 i と買手 j の間にリンクが存在するためには、売手 i の隣人の集合 $N(i) \subset T$ と買手 j の隣人の集合 $N(j) \subset T$ の両方に含まれる取引業者が存在しなければならない。

$$E = \{(i, j) : N(i) \cap N(j) \neq \emptyset\}$$

である。この二項グラフ表現において、取引業者の存在は明示的に現れていないが、取引が取引業者を介して行われる構造は維持されている。リンク (i, j) を経由して財が配分されるときの社会的な価値は $\theta_{ji} - \theta_{ij}$ となっている。社会的な価値の大きさは、この取引がどの業者によって仲介されたかには依存しない。割当ゲーム $G = (B \cup S, E)$ における最適線形計画問題は制約条件

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall (i, j) \in E, \tag{3}$$

$$\sum_{j \in N'(i)} x_{ij} \leq 1,\ \forall i \in S, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in N'(j)} x_{ij} \leq 1,\ \forall j \in B \tag{5}$$

のもとで、目的関数

$$SV(x) = \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}(\theta_{ji} - \theta_{ij}) \tag{6}$$

を最大化することである。ここで、$N'(i)$ は売手 i の隣人取引業者 $N(i) \subset T$ の隣人となっている買手の集合 $N(N(i)) \subset B$ である。$N'(i)$ は売手 i が販売可能な買手の集合となっている。$N'(j)$ も同様に定義されている。$x_{ij} = 1$ となるとき、売手 i の保有する財がある取引業者 $N(i)$ を介して買手 j に販売される。

取引ゲームのサブゲーム完全均衡が社会的に最適な配分を実現するか否かを分析するためには、この線形計画問題とその双対な計画問題の解がゲームの均衡になることを示す必要がある。この双対な計画問題では、取

引業者に関する制約条件が明示的に現れていないので、取引業者の利得を双対変数として取り扱えない。そこで、取引ゲームの均衡を社会的に最適な取引と関係付けるために、取引業者 t の意志決定問題を考察してみよう。

自分以外の取引業者、$t' \in T,\ t \neq t'$ の戦略（買値と売値）情報が与えられたとき、業者 t の最適な戦略を考えてみよう。業者 t 以外の業者がオファーした買値価格のもとで得られる売手 i の最大利潤を p_i と表記する。同様に、自分以外の業者がオファーした売値価格のもとで買手 j が得る最大利潤を p_j と表現する。取引業者 t とリンク接続している売手ー買手の組 (i, j) において取引を実現するためには、t は売手 i に少なくとも $\beta_{tij} = \theta_{ij} + p_i$ 以上を保証する買値を提示する必要があり、買手 j には $\alpha_{tji} = \theta_{ji} - p_j$ 以上を保証する売値価格をオファーする必要がある。このとき業者 t が得ることのできる最大利潤は $v_{tij} = \alpha_{tji} - \beta_{tij} = \theta_{ji} - p_j - (\theta_{ij} + p_i)$ である。取引業者 t の最適取引問題は、売手集合 $S(t)$ と買手集合 $B(t)$ の組合せの中で、利潤 v_{tij} を最大にする組合せを見出すマッチング問題に帰着する。このマッチング問題は以下の線形計画問題の解である。制約条件

$$x_{tij} \geq 0,\ \forall i \in S(t),\ \forall j \in B(t), \tag{7}$$

$$\sum_{j \in B(t)} x_{tij} \leq 1,\ \forall i \in S(t), \tag{8}$$

$$\sum_{i \in S(t)} x_{tij} \leq 1,\ \forall j \in B(t) \tag{9}$$

のもとで、目的関数

$$V_t(x_t) = \sum_{i \in S(t), j \in B(t)} x_{tij} v_{tij} \tag{10}$$

を最大化することである。LP 問題の双対問題は

$$\min \pi_t(q_t) = \sum_{i \in S(t) \cup B(t)} q_{ti} \tag{11}$$

subject to

$$q_{ti} \geq 0,\ \forall i \in S(t) \cup B(t) \tag{12}$$

$$q_{ti} + q_{tj} \geq v_{tij}, \forall i \in S(t), \forall j \in B(t) \tag{13}$$

となる。ここで、q_{ti} は t が売手 i と取引することから得られる利潤、q_{tj} は t が買手 j と取引することから得られる利潤を表現している。それぞれ、もとの LP 問題における売手と買手に関する制約条件に対応する双対変数となっている。

取引業者 t にとって、売手が受託する最低売値価格 β_{tij} と買手が受諾する最高買値価格 α_{tji} のもとで、t が実現できる取引 (i, j) から得られる最大利得は $v_{tij} = \alpha_{tji} - \beta_{tij}$ である。この最大利得は双対問題の目的関数の最小値に等しい。$x_e = 1, e = (i, j)$ となっている均衡では、この取引は輸送線形計画問題 (6) の解となっている。このことから、以下の定理が成立つ[*20]。

定理 3.1
取引ゲームの均衡は社会的に最適な配分を実現している。また、社会的に最適な取引を実現する均衡が必ず存在する。

[*20] 証明については、Blume et al(2009) を参照のこと。

取引業者が取引を仲介することによって正の利潤が獲得できるネットワーク環境の特徴について考える。取引業者が買手から財を購入するとき、その買手に他の取引業者が提示する買値よりも安い価格をオファーしなければならないので、取引業者間の競争の結果、各取引業者は正の利潤を確保できない。同様に、売手にオファーする売値に関しても、取引業者間の競争が存在する限り、正の利潤を獲得できない。この議論から理解できる通り、取引業者が正の利潤を獲得できるのは、彼が売手に対して買手独占の位置に立つとき、もしくは、買手に対して売手独占の地位に立てる場合だけである。以下の定理が成立つ。

定理 3.2
均衡において、取引業者 t と取引している売手もしくは買手 i が存在しているとする。買手が正の利潤を獲得できるのは、i と t との間のリンクが社会的厚生上本質的になっている場合だけである。

社会的に本質的なリンクとは、このリンクを削除するとき、取引によって生じる財配分の社会的価値が減少するときを指す。

以上の結論の一般性について考える。この結論を演繹するときの仮定の一つは、売手は 1 単位の財を保有している仮定であった。売手が保有する財の数が多数になるときには、上記結論が拡張できることは知れれている[*21]。もう一つの仮定は完全情報の仮定であった。各取引業者が、各売手や買手が財に対して付ける主観的評価価値に関する情報を完全には知り得ない場合、この結論が成立するか否か未解決である。さらに、卸売市場が存在する場合に見られるような、取引業者間の取引を導入したとき、上記結論はどのような修正が必要なのかについても、未解決の課題になっている。取引ネットワークのリンク接続パターンは外性的に所与として分析されているが、ネットワーク構造は経済動機に基づいて主体的に形成される筈である。ネットワーク形成の内生的な形成動機の分析が必要とされている。

4 経済ネットワークと交渉問題

4.1 ネットワークにおける交渉力

前節でも見たように、ネットワーク上でいかなる地位を占めるかが、市場における力関係、例えば、各主体の利得の取り分の大きさに大きく影響する。ネットワークにおける力（勢力、影響力）なる概念は社会学の研究で重要な役割を果たしてきた。大きな社会的ネットワークの中で、ある主体の力が複数の人間の間でどのよう形成され、どのように作用するのかが研究されてきた。二人の主体間の社会的関係はある種の価値を両者にもたらす関係であると理解されている。経済的関係で言えば、二人が一緒に協力して生産することで経済的な価値が生み出される。生み出された価値を二者間で配分することが社会的交換といわれ、その分配におけるインバランスさが力（関係）と言われる。こうした社会的交換における力、交渉力、影響力の源泉が社会的ネットワークの構造に起因すると見なす理論はネットワーク交換理論と呼ばれている。この理論で採用されている主要概念は、従属性 (dependence)、排除性 (exclusion)、飽和性 (satiation)、そして中継度性 (betweenness) である。これらの要因が社会的交換においてどのように作用しているのか、どのように重要な役割を果たしているのかを、被験者を用いた人工的実験によって確かめようとする研究が行われてきた。

この実験で想定されたネットワークは、以下の図で示されるように、ノード数が 2 から 5 つまでの単純なネットワークである。

[*21] Blume et al(2009) を参照のこと。

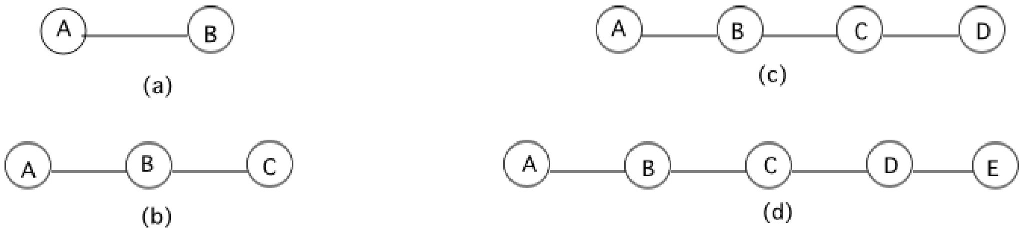

Fig.4.1　交渉ネットワークの実験

実験は以下のように行われる。ネットワーク上のノードの位置に被験者をおき、ノード間の各リンク（枝）に、例えば、１万円を配る。リンクで接続した２者間でこのお金の配分を決めさせる。各ノードは、隣接するノードとお金の配分を交渉し、合意すれば配分通り１万円を分配して受け取れる。交渉は何度繰り返しても良い。しかし、最終的には、一人の隣人ノードとだけのみ合意可能で、配分通りのお金を受け取れる。隣人の一人と合意したとき、その隣人以外のノードとは取引できない。

Fig.4.1(a) で表されているネットワークで、A と B が１万円を交渉して配分しあう交渉問題を考えてみる。ゲーム理論では、交渉ゲーム (bargaining game) の解はナッシュ交渉解として与えられる。交渉決裂したとき、A がこの交渉に合意しなければ得られる留保利得が x（万円)、B の留保利得が y（万円）であるとする。$x + y < 1$ でなければ、交渉の意味がない。A は少なくとも x を最低限要求し、B も y 以上を要求するので、剰余 $s = 1 - x - y > 0$ をいかに分け合うかが問題となる。交渉力が均等であるときは、この剰余 s を均等に分け合うことに合意するだろう。つまり、A は $x + s/2$ を、B は $y + s/2$ を受け取ることに合意する。これが、ナッシュ交渉解の出発点である。だから、ノード数が２のとき、理論的に予想されるのは、均等な分配である。実験でも、近似的に、理論通りの結果が得られている。

Fig.4.1(b) のような３人からなるネットワークでは、理論上は、個人 B は個人 A や個人 C よりも交渉力が大きいと予想される。なぜなら、B は A と合意することが嫌なら、C と交渉する機会が残っているが、A や C は交渉相手として B しかいない。実験によると、B は非常に多くの頻度で配分の約 5/6 の大きさを受け取ることが知られている。４つのノードからなるネットワーク Fig.4.1(c) では、B は A および C と交渉できる一方で、C が D と合意して、C との交渉から排除される可能性もある。３人ネットッワークに比較して、B の立場は弱くなっている。実験によると、A-B の交渉は、B が 7/12 から 2/3 の間での配分を得るという。５人からなるネットッワークでは、C はネットッワークの中心に位置するが、交渉力は弱い。なぜなら、交渉相手の D が E と交渉して合意する可能性を有しているからである。C はネットッワークの中心に位置するからと言って、B や D のような強い立場を維持できる訳ではない。C は A および E よりも少しだけ強い立場にいると言える。

以上の交渉ネットッワークは、市場での売手と買手の取引ネットッワークと解釈することができる。この場合、売手と買手の間の価格交渉の問題になる。ただし、１単位の商品の取引と１回だけの取引が想定されているので、複数単位の取引や反復する取引の場合には修正が必要となる。

ここで、最後通告ゲーム (ultimatum game) を取り上げることが必要である。A と B の間の最後通告ゲームは以下のルールに従って行われるとする。

1. 個人 A が１万円を渡され、個人 B と分け合うことを要請される。A は、１万円のうちどれほどを B に分け与え、自身がどれほどを受け取るかを、B に提案する。

2. 個人 B は A によって提案された配分案を受け入れるか、拒否するかを選択する。
3. B が A の提案を受諾すれば、A の提案とおりに 1 万円を分け合うことができる。しかし、B が拒否したとき、A は 1 万円を返却し、両者とも何も得られない。

この 1 回限りのゲームで、どのような配分がゲームの解となるであろうか。各個人が自分の受け取る貨幣額を最大化することを目的として行動すると仮定しよう。このとき、個人 B は、個人 A が小額の配分額を B に配分する提案を受け取るとき、それを拒否するよりは、受諾する方が効用を大きくするので、A のそのような提案を受諾するだろう。だから、個人 A は、B の行動を予想して、ほんの少量の金額を個人 B に渡し、自分がほとんど全部の金額を手に入れようとするだろう。この観点から見れば、個人 A は絶大な権力を持っているのに対して、個人 B は受け身的な立場にしかない。ところが、被験者を使った最後通告ゲームの実験結果によれば、通常、人々の行動はこの理論的予測とは整合的な行動を取らない結論に到達した[*22]。個人 A の役割をする被験者は、平均的には、均等に近い配分案を提示する、特に、全体の 3 分の 1 は平等な配分案をオファーする事実が判明した。また、B にとって極端に不平等と思えるような配分案は B によって拒否されると言う事実も分かった。

このような実験観察の結果をゲーム論的分析枠組み内で整合的説明することが必要である。この問題を解決する幾つかの方法があるが、最も単純な想定は、入手できる貨幣額のみならず、公平な取り扱いを受けた度合いも個人の効用関数の変数になっていると仮定することである。この場合には、極端に低い配分を提案されるとき、B は不公平な取り扱いを受けたという否定的な感情を抱き、提案を拒否する行動を取ることになる。ネットットワーク上で隣接するノード間での配分交渉問題を考えるときには、このような視点が必要となる。

ネットットワーク上にあるすべてのリンクに 1 万円が渡されていて、リンクで接続されているノード間での配分交渉問題を考える。合意形成ができなかったリンク上の 1 万円は没収される。ネットットワーク上で配分交渉問題を分析するためには以下の 2 要素を特定することが必要である。一つは、ノードの集合上におけるマッチング、つまり、どのノードとどのノードが配分案に合意するかを確定することである。簡単のために、一対一でのみ配分案は実現するとする。第二に、交渉により、各ノードがどれほどの価値を手にしたかを特定しなければならない。交渉問題の実現結果は、安定性の観点と、公平性の観点から分析する必要がある。

簡単なネットットワークにおける交渉結果の例を下の Fig.4.2 に示す。各ノードの上に明記されている数値は、太い実線のリンク接続で結ばれたノード間で合意された配分結果の取り分である[*23]。

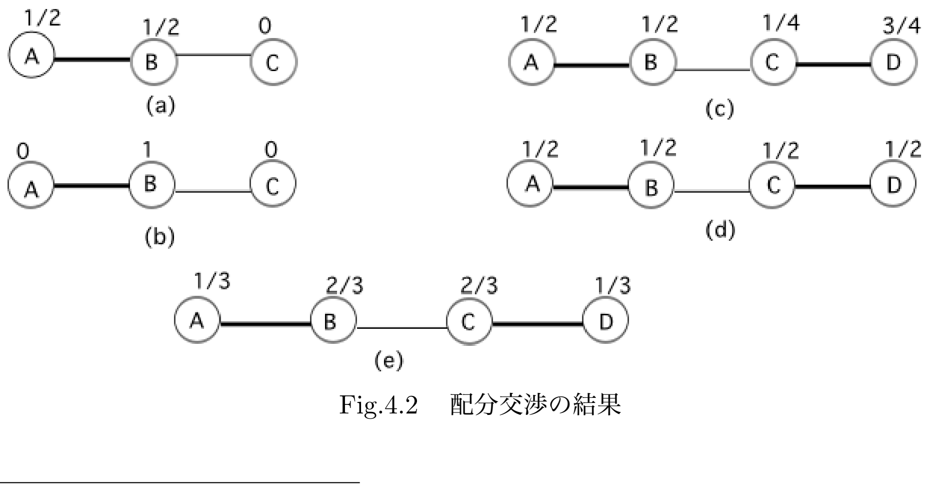

Fig.4.2 配分交渉の結果

[*22] この結果については、Guth, Schmittberger and Schwarze(1982)、Thalor(1988) を参照のこと。
[*23] これらの例は、Easley and Kleinberg(2010) からの引用である。

配分交渉の結果が例 (a) で与えられるとき、個人 C は何もできないでしょうか。例えば、C が自身は 1/3 をとり、残りの 2/3 を B にあげるという提案を B に逆提案すると、B は喜んでこの C の提案を受けるでしょう。すると、A と B との間で 1/2 と 1/2 に配分する提案は B に拒否されることになる。結果の例 (a) は不安定な配分提案である。すなわち、C が隣接するノード B に対して、B と C の利得を共に増加させるような配分提案が存在するとき、不安定な配分結果であると言う。B と C の間で 2/3 と 1/3 に分け合う配分も不安定である。なぜなら、A は B に対して、1/4 と 3/4 で分け合う配分案を提案すると、両者とも利得が増加できる。例 (b) に見られる配分結果は不安定ではない。何故なら、C は B に対して B の利得を増加させる提案をオファーすることができない。例 (b) は安定な結果である。同じようにして分析すると、例 (c) は不安定な結果であるが、例 (d)(e) は安定な結果となっている。

上の例で見られる通り、交渉問題の安定な配分結果は複数個存在する。安定な結果のうち、実際に実現する結果はいかなる性質を満たすのだろうか。協力ゲーム理論によれば、交渉ゲームの結果はナッシュ解で与えられる。つまり、隣接するノード間の配分問題はナッシュ解で与えられる。この場合、各ノードの外部的オプションの価値は、考慮している配分交渉の当該ノード以外の隣接するノードとの配分から予想できる受取額になる。上の例（e）を見てみると、個人 A は B との間の配分交渉以外に外的な価値を得る機会はないので、外的な留保価値はゼロである。これに対して、B は C と配分交渉する機会があるので、外的な留保価値は 1/3 である。ナッシュ交渉解では、A に 1/3、B に 2/3 を配分することになる。各ノードの配分額がナッシュ交渉解と同一になっている配分結果はバランスした結果と言われる。例 (e) に見られる結果はバランスした配分結果となっている。

4.2 買手ー売手ネットワークにおける交渉ゲーム

取引ネットワークには、n 人の買手と m 人の売手が参加しており、各売手は 1 単位の非分割財を保有しており、買手は 1 単位の貨幣を所有している。売手および買手は同一の効用関数を持っている。各時刻 $t(t = 1, 2, \ldots)$ で売手と買手が価格 p で取引を行うと、売手は $\delta^t p$ の効用を、買手は $\delta^t(1 - p)$ の効用を得られる。δ は売手と買手の時間割引率で、両者に共通とする。買手 b_i と売手 s_j が売買取引を実行できるためには、ネットワーク上でノード b_i とノード s_j の間にリンク接続が存在していなければならない。買手の集合を $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ 売手の集合を $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ と表記する。買手と売手の間にあるリンク接続の集合を E と表現する。買手 b_i と売手 s_j の間のリンク接続は形式 (b_i, s_j) と表現し、買手 b_i と売手 s_j の間のリンク接続が存在するとき、$(b_i, s_j) \in E$ である。売手と買手からなる取引ネットワークは、前節と同じく、2 項グラフ $G = (B \cup S, E)$ で表現される。

グラフ $G = (B \cup S, E)$ において、表記し、買手 b_i の隣人の集合（b_i にリンクされている売手の集合）を $N_g(b_i)$ と表記し、売手 s_j の隣人の集合（s_j にリンクされている買手の集合）を $N_G(s_i)$ と表現する。$B_0 \subset B$, $S_0 \subset S$ とし、B_0 に属するノードと S_0 に属するノード間のリンンク接続の集合を $E_0 \subset E$ とするとき、グラフ $G_0 = (B_0 \cup S_0, E_0)$ を G の部分グラフという。

取引における交渉は以下のゲームのルールに従うとする。売手サイドまたは買手サイドから交渉の提案がオファーされ、相手サイドの各主体がその提案を受諾するか否かを答える。提案が受諾されたとき、提案者と受諾者の組は取引を実行して市場から去る。売手が提案を行い、買手が提案に回答するところからゲームが始まるようなサブゲームを s-ゲームと呼び、買手が提案をして売手がそれに返答するところから開始されるサブゲームを b-ゲームと呼ぶ。

時刻 t が奇数であるとき、売り手全員が同時に提案を行う s-ゲームが始まる。t が偶数であるとき、買い手

全員が同時に提案をする b-ゲームが行われる。$t=1$ が初期時点である。$G^t=G^1=G$ である。ゲーム G^t において、全提案者は同時に取引価格 $p\in[0,1]$ をオファーする。返答者はリンクされた提案者のオファーを受諾するか否かを返答する。もし受諾者が存在する場合、以下のようの手続きに従って、取引が実行される*24。

k 種類の価格 $p^1,p^2,\ldots,p^k$ が受諾され、価格 $p^i(i=1,2,\ldots,k)$ が l_i' 人の提案者によってオファーされ、l_i の受諾者がいたとする。l_i' 人の提案者と l_i 人の受諾者をリンク接続するサブグラフを $G_i^t\subset G^t$ と表記する。サブグラフ G_i^t のなかで形成可能な売手ー買手のペア（マッチング）の最大数を M_i^t とする。このマッチングが形成されるメカニズムの詳細を別にして、M_i^t 組の売手と買手のペアが取引を実行して、市場から退去する。マッチングができなかった主体は市場にそのまま残る。M_i^t 組の売手と買手を G_i^t から削除してできるサブグラフを G_i^{tm} と表記する。

だから、時刻 $t+1$ になると、時刻 t におけるネットワークから取引した売手と買手が退去しているので、市場ネットワークは G^t から $G_i^{tm},\ i=1,2,\ldots,k$ を削除したサブグラフに縮小する。時刻 $t+1$ での市場ネットワークのグラフは

$$G^{t+1}=G^t-\{G_1^{tm},\ldots,G_k^{tm}\}$$

となる。

$$G^{t+1}=\sum_{j=1}^{m_{t+1}}G_j^{t+1}$$

と表現できるとする。ここで、m_{t+1} は時刻 $t+1$ で市場ネットワークを構成する部分グラフの数である。部分グラフ G_j^{t+1} の中で、ただ一つのノードしか含まないサブグラフがあれば、このノードの利得をゼロとして、グラフから削除する。ここから再び、提案者のサイドが反転して、上記と同じ交渉ゲームが再開される。

ネットワーク G のサブゲーム完全均衡 (Subgame Perfect Equilibrium:SPE) を求めるためには、すべての部分グラフのサブゲーム完全均衡 (SPE) を求めておく必要がある。最も簡単な部分グラフはただ一組の売手ー買手のリンクが存在するケースである。この場合、Rubinstein(1982) が考察した交渉ゲームと同一になる。売手の交渉コストを c_1、買手の交渉コスト c_2 とし、売手の割引率を δ_1、買手の割引率を δ_2 とするとき、以下の結果が知られている。$c_1<c_2$ のとき、買手がすべての利得配分を受け取る。$c_1>c_2$ のとき、買手は利得のうち c_2 の割合を受け取る。$c_1=_2$ のとき、サブゲーム完全均衡で売手が獲得できる配分は $(1-\delta_2)/(1-\delta_1\delta_2)$ となる。ここで考察しているモデルでは、$c_1=c_2=0$、$\delta_1=\delta_2=\delta$ と仮定している。

売手あるいは買手の人数が 2 名以下であるような部分グラフを最初に取り上げる。つまり、$|S|=2,|B|=1$ あるいは $|S|=1,|B|=2$ である。この場合、人数が多いサイドの交渉力は相対的に低いので、人数が少ない方のサイドの経済主体がすべての利得を獲得する。理由は単純である。例えば、$|S|=2,|B|=1$ のとき、売手の一人が正の価格で売ることを提案すると、他の売手は自分の商品を売るために、この価格以下で売ることを提案するであろう。この価格切り下げ競争が停止する価格はゼロ以外にない。均衡では、価格の切り下げ競争の経済動機が存在してはいけないので、売手が提案する価格はゼロ以外に存在しない。サブゲーム完全均衡において売手が得る利得はゼロで、買手の利得は 1 となる。反対に、$|S|=1,|B|=2$ のとき、サブゲーム完全均衡における売手の利得は 1 で、買手の利得はゼロとなる。

次に、$|S|=2,|B|=2$ のケースを考えよう。売手と買手をリンクする接続パターンは 2 種類しか存在しない。

*24 交渉ゲームのプロトコルについては、Rubinstein and Wolinsky(1985) などを参照のこと。

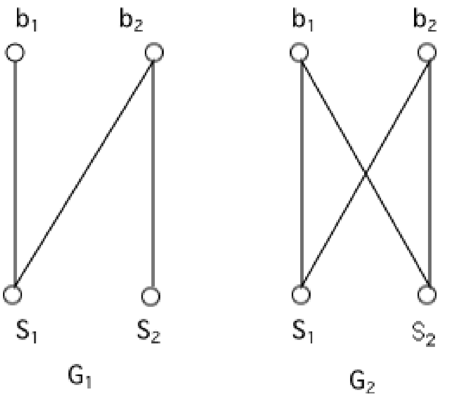

Fig.4.3　2 人売手と 2 人買手の取引ネットワーク

売手と買手が非対称的な立場にあるケース、グラフ G_1 を取り上げる。売手 1 は二人の買手と交渉できるが、売手 2 は買手 2 とのみ交渉可能なので、売手 1 は売手 2 よりも競争優位の立場にいる。同じように、買手 2 は買手 1 よりも競争優位にいる。売手 2 は買手 2 とのみ交渉可能なので、売手 1 が買手 2 に提示した価格より安い価格を必ず反対提案する。この売手 2 の行動を予想する売手 1 は、買手 2 とは取引交渉をせず、買手 1 とのみ交渉すると予想される。（注意：各売手は 1 単位の財のみを所有している。）このことを知っている売手 2 は買手 2 と取引交渉を行う。従って、このグラフは、独立した 2 つの売手ー買手ペアに分解できる。SPE では、各売手は同一の価格 $p = 1/(1+\delta)$ を提示する[*25]。

売手と買手が対称的な立場にいるケース、G_2 を考える。すべての売手がすべての買手にリンクしている。従って、すべての売手は同一の価格を提示することになる。上記の G_1 のケースでの議論を敷衍すると、各売手は互いにライバルの価格を下回る価格を提示する動機を持つので、各売手は買手の一人だけに価格をオファーする。各売手が提示する価格が $p = 1/(1+\delta)$ に等しいときのみ、この提案から逸脱する経済動機を持たない。従って、SPE の配分では、各売手の利得は $p = 1/(1+\delta)$、各買手の利得は $1-p$ となる。

以上のことから、以下の補題が成立する。この補題の前提的仮定は、各売手は 1 単位の財を保有しており、貨幣と交換することを望んでいる。また、買手は 1 単位の貨幣を保有していて、貨幣を 1 単位の財と交換することを望んでいる。各買手の効用関数は同一なので、財に対する評価額も同一である。売手は得られる貨幣量が多いほど、より高い効用を得られる。買手は財と交換する貨幣量が少ないほど、より高い効用を得られる。売手と買手の交渉ゲームは上記の交互オファーのルールに則って行われる。

補題 4.1
売手あるいは買手の人数が *2* 以下であるとする。

1. 売手と買手の人数が同一となっている取引ネットワークにおいて、サブゲーム完全均衡での配分では、各売手の利得は $p = 1/(1+\delta)$、各買手の利得は $1-p$ となっている。

2. 売手と買手の人数が異なる取引ネットワークにおいては、サブゲーム完全均衡での配分では、人数の少ないサイドの経済主体の利得が *1*、多い方のサイドの利得はゼロとなる。

[*25] この結論は、各売手が 1 単位の財を保有するという仮定を前提にしている。もし売手が複数個の財を保有する場合は、この限りではない。

この補題は売手あるいは買手の人数が 3 以上の一般的な買手ー売手ネットワークにおいても成立するのか、これが以下で解明すべき案件になる。上記の補題が一般的に成立しない例を挙げる。売手が 3 人、買手が 2 人で、各取引リンクが G_3 のようになっているケースを考える。

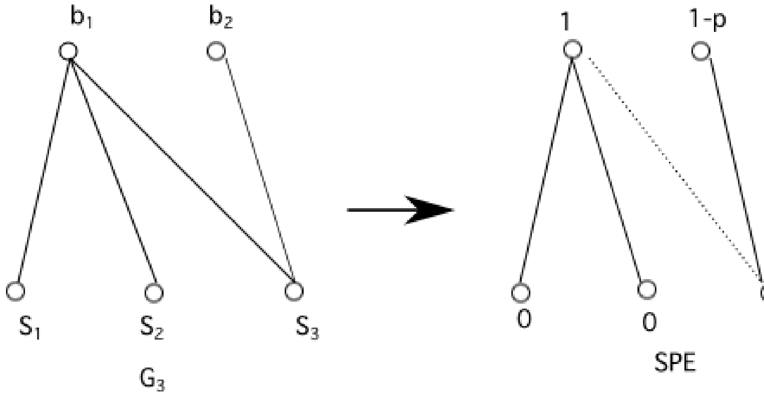

Fig.4.4　3 人売手と 2 人買手の取引ネットワーク

売手 1 と 2 は買手 1 とのみ取引できるので、売手 1 と 2 の間の競争により、売手 1 と 2 の利得はゼロとなる。売手 3 は買手 1 と取引を行うと利得がゼロとなることを知っているので、買手 2 とのみ取引を交渉する。売手 2 は買手 3 に価格 $p = 1/(1+\delta)$ を提示し、買手 3 の利得は $1-p$ となる。この取引ネットワークは、3 つのノード $\{s_1, s_2\} \cup \{b_1\}$ から構成されるサブグラフとノード $\{s_3, b_2\}$ からなるサブグラフに分解され、それらのサブグラフでの取引が相互依存していないかのごとくに実行される。

上記補題が成立しない理由は、人数の少ない売手ノードが人数の多い買手ノードへ十分なリンク数を持っていないからである。二人の売手と二人の買手とのマッチングを形成するのに十分なリンクが確立されていない。補題が成立するためには、人数が少ないサイドのノード数と同数以上のマッチングが実現可能なリンク接続パターンが必要である。

定義 4.1

$|B| = n, |S| = m$ である取引ネットワーク（グラフ）G を以下のように G^s, G^b, G^e の 3 種類に分類する。

$n < m$ であるとき、すべての売手からなる集合から、少なくとも n 組の売手ー買手のマッチングが形成できるならば、取引ネットワーク G はタイプ G^s に属する。

$n > m$ であるとき、すべての買手からなる集合から、少なくとも m 組の売手ー買手マッチングが形成できるならば、取引ネットワークはタイプ G^b に属する。

$n = m$ であるとき、すべての売手の集合とすべての買手の集合から一対一マッチングが実現できるならば、取引ネットワーク G はタイプ G^e に属する。

取引ネットワークが G^s, G^b, G^e のいずれかに属するならば、上記補題が適用できる。ネットワークが G^s, G^b, G^e のいずれかに属するか否かは、グラフ理論における結婚定理を適用すれば判定できる。しかし、すべてのネットワークがこの 3 種類のグラフのいずれかに分類できる訳ではない。G^s, G^b, G^e のいずれにも分類できないグラフが存在する。この場合、取引ネットワーク G を幾つかのサブグラフに分解して、各サブグラフが G^s, G^b, G^e のいずれかになるようにすることができる。上で見た 3 人売手と 2 人買手の取引ネットワーク G_3 は、3 つのノード $\{s_1, s_2\} \cup \{b_1\}$ から構成されるサブグラフ G^s とノード $\{s_3, b_2\}$ からなるサブ

グラフ G^e に分解される。以下の分解定理が成立することが知られている[*26]。

定理 4.1 (分解定理)
(1) すべてのネットワーク G は、G^s タイプのサブグラフ、G^b タイプのサブグラフ、G^e タイプのサブグラフの組合せに分解できる。ただし、元のグラフの各ノードはただ一つのサブグラフにのみ属し、G^s タイプのサブグラフに属するすべての売手は G^s タイプのサブグラフの買手とのみリンク接続を持つ（G^b タイプのサブグラフに属するすべての買手は G^b タイプのサブグラフの売手とのみリンク接続を持つ。
（2）さらに、元のグラフのあるノードは、いかなる分解においても、同一タイプのサブグラフに属する。

取引ネットワーク G を分解してできた G^s タイプのサブグラフを $G_1^s, G_2^s, \ldots, G_{ns}^s$、$G^b$ タイプのサブグラフを $G_1^b, G_2^b, \ldots, G_{nb}^b$、$G^e$ タイプのサブグラフを $G_1^e, G_2^e, \ldots, G_{ne}^e$ とすると、

$$G = G_1^s \cup \cdots G_{ns}^s \cup G_1^b \cdots \cup G_{nb}^b \cup G_1^e \cdots \cup G_{ne}^e$$

と表現できる。ただし、各サブグラフは同一のノードを共有しない。このサブグラフへの分解は 1 種類とはかぎらない。複数種類の分解の仕方が存在する。定理の (2) は、例えば、タイプ G^s のサブグラフに属するノードとして分解されたノードは、どのような分解でできたサブグラフでも、タイプ G^s のサブグラフに属することを指摘している。

上記の定理を適用すれば、売手ー買手ネットワークにおける交渉ゲームのサブゲーム完全均衡を求めることができる。しかし、求められた SPE がユニークである保証はない。交渉ゲームの研究でも知られている通り、複数の均衡が存在する[*27]。

ここでの交渉ゲームによる売手ー買手ネットワークのモデルと前節で分析した売手ー買手ネットワークの Kranton-Minehart モデルとの相違について考える。Kranton-Minehart モデルでは、交換される財に対する評価額は買手に依存して異なっているため、価格交渉はオークション方式で決定される。このことにより、売手と買手のマッチングの相違は社会的な価値の大きさに大きな影響を与える。ここでのモデルでは、こうした効果は存在しない。両者のモデルで共通する仮定は、各経済主体に関する情報が完全であること、つまり、すべての主体の共通知識となっている想定である。また、将来に起こる不確実性の存在も無視されている[*28]。

5 結び

現実社会では、経済的な取引の多くは取引者の間でネットワーク的な関係性を確立した取引ネットワークを活用して実現される。無匿名の無関係な経済主体同士が何の疑いも、摩擦も伴わず取引を実現できる訳ではない。経済的取引がネットワーク上に連結した経済主体の間で実現できることを明示的に考慮して、モデルを定式化するならば、従来の市場均衡の概念とそこから導出される含意は再検討されることになる。

本稿の目的は、こうした方向における研究アプローチのもとで、経済ネットワークの分析を押し進めるために必要なゲーム論的視点を提供することにあった。とりわけ、取引ネットワークの特徴と、そこにおける市場均衡の特徴および資源配分の社会的効率性の問題を分析するためには、どのような要素を組み込んだモデルを定式化するのが望ましいのかを説明した。当該個所で明確に指摘してきた通り、経済ネットワーク理論の現状

[*26] この定理の証明に関しては、Corominas-Bosch(2004) を参照のこと。
[*27] このモデルをより一般的な取引ネットワークへの拡張を試みた研究として、Polanski(2007) を参照のこと。
[*28] 多段階交渉ゲームへの拡張については、Manea(2011) および Abreu and Manea(2012a,b) を参照のこと。

は現実的な取引ネットワークの特徴を十分に取り込んだ定式化にはほど遠い状態にある。今後の更なる精力的・集中的な研究が緊急の課題ともなっている。

例えば、買手ー売手の取引ネットワークでは、取引関係（ネットワーク・パターン）が所与であれば、取引者間の競争がオークション過程を介して行われるならば、取引ゲームの均衡は効率的な資源配分を実現できる。しかし、ネットワーク・パターン（取引関係）の形成が内生的に行われる取引ゲームでは、リンク接続費用がある閾値を超えるとき、サブゲーム完全均衡は効率的な資源配分を必ずしも実現できない。このような特質は簡単なモデルで確認できた。買手と売手の仲介取引を専業とする中間業者が存在するような取引ネットワークでも、ネットワーク・パターンが所与であるケーでは、取引ゲームの均衡は社会的に最適な資源配分を実現する。他方で、ネットワーク・パターンが内生的に形成される場合は、ゲームの均衡は効率的な資源配分を必ずしも実現できないと予測される。が、ネットワーク・パターンが内生的に形成される過程を明示的に定式化した厳密なモデル分析は未解決の領域となっている。

参考文献

[1] 岡田　章 (2011)、『ゲーム理論』(新版)、有斐閣.

[2] Dilip Abreu and Mihai Manea(2012a), Markov equilibrium in a model of bargaining in networks, *Games and Economci Behavior*, 75, 1-16.

[3] Dilip Abreu and Mihai Manea(2012b), Bargaining and efficiency in networks, *Journal of Economic Theory*, 147, 43-70.

[4] Robert J. Aumann(1989), *Lectures on Game Theory*, Westview Press.

[5] Lawrence E. Blume, David Easley, Jon Kleinberg, and Eva Tardos(2009), Trading networks with price-setting agents, *Games and Economic Behavior*, 67, 36-50.

[6] Sushil Bikhchandani and Joseph M. Ostroy(2002), The package assignment model, *Journal of Economic Theory*, 107, 377-406.

[7] Margarida Corominas-Bosch(2004), Bargaining in a network of buyers and sellers, *Journal of Economic Theory*, 115, 35-77.

[8] Vincent P. Crawford and Elsie Marie Knoer(1981), Job matching with heterogeous firms and workers, *Econometrica*, 49(2), 437-450.

[9] Gabrielle Demange and David Gale(1985), The strategy structure of two-sided matching markets, *Econometrica*, 53(4), 873-888.

[10] Gabrielle Demange, David Gale and Marilda Sotomayor(1986), Multi-item auctions, *Journal of Political Economy*, 94(4), 863-872.

[11] David Easley and Jon Kleinberg(2010), *Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a High Connected Worlds*, Cambridge University Press.

[12] Drew Fudenberg and Jean Tirole(1991), *Game Theory*, MIT Press.

[13] David Gale and Lloyd Shapley(1962), college admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, 69, 9-15.

[14] David Gale(1960), *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw Hill.

[15] Douglas M. Gale and Shachar Kariv(2007), Financial Networks, *American Economic Review*, 97(2), 99-103.

[16] Werner Guth, Rolf Schmittberger and Bernd Schwarze(1982), An Experimental Analysis of Utltimatum Bargaining, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, 807-817.

[17] Rachel E. Kranton and Deborah F. Minehart(2001), A theory of buyer-seller networks, *American Economic Review*, 91(3), 485-508.

[18] Mihai Manea(2011), Bargaining in stationary networks, *American Economic Review*, 101, 2042-2080.

[19] Roger B. Myerson(1991), *Game Theory: Analysis of conflict*, Harvard University Press.

[20] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein(1994), *A Course in Game Theory*, MIT Press.

[21] Martin J. Osborne(2004), *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press.

[22] Arnold Polanski(2007), Bilateral bargaining in networks, *Journal of Economic Theory*, 134, 557-565.

[23] Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor(1990), *Two-Sided Matching: A study in Game-theoretic modeling and analysisi*, Cambridge University Press.

[24] Ariel Rubinstein(1982), Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica*, 50(2), 97-109.

[25] Ariel Rubinstein and Asher Wolinsky(1985), Equilibrium in a market with sequential bargaining, *Econometrica*, 53(5), 1133-1150.

[26] Lloyd Shapley and Martin Shubik(1971), The assignment game, *International Journal of Game Theory*, 1, 111-130.

[27] Martin Shubik(1984), *A Game-Theoretic Approach to Political Economy*, MIT Press.

[28] John Maynard Smith(1974), The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflicts, *Journal of Theoretical Biology*, 47, 209-21.

[29] John Maynard Smith(1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press（日本語訳『進化とゲーム理論』産業図書）.

[30] Marilda Sotomayor(1999), The lattice structure of the set of stable outcomes of the multiple partnerships assignment game, *International Journal of Game Theory*, 28, 567-583.

[31] Richard H. Thalor(1988), Anomalies: The Ultimatum Game, *Journal of Economic Perspective*, 2, 195-206.

[32] Jorgen W. Weibull(2002), *Evolutionary Game Theory*, MIT Press.