ネットワークゲームと
経済ネットワークの社会的効率性

増山　幸一
明治学院大学経済学部

Discussion Paper No.13-04
2013 年 12 月: preliminary version

目次

1　序

経済学の伝統的な競争的均衡理論では、すべての売手は多数の市場で出会った無匿名の買手と商品の取引ができると想定されている。しかし、現実の市場取引を観察すれば明白になるように、多くの財やサービスは自動車や住宅のように異質的な性格を有し、部品等な取引に典型的に見られる通り、その取引にはある特殊な社会的関係が必要とされ、取引相手を見出すための費用と可能性は、輸送コスト、社会的人間関係、情報や広告、技術的整合性や共同開発の機会などに大きく影響される。こうした現実の経済取引を十分に説明するためには、経済取引が主体間に巡らされた社会的ネットワークを介して行われることを明示的にモデル化する必要に迫られる。近年になって、経済活動をネットワーク的に連結した経済主体間の取引として明示的にモデル化する研究が急速に進み、経済的社会的ネットワークの経済分析と呼べる領域が深化しつつある。よるこうした領域での研究成果に関する包括的な解説書として、Jackson(2008)、Easley and Kleinberg(2010) などが代表的である。[*1]

ネットワーク上のノードをネットワーク・ゲームのプレイヤーとして考えるとき、各プレイヤーの意思決定はネットワークを介して相互作用している。各ノードの意思決定は彼 (彼女）の隣人の意思決定に大きな影響を受け、隣人の隣人の行為から、さらに隣人の隣人の隣人の行為からもそれなりの影響を受ける。こうした相互依存効果はネットワーク効果と呼ばれているが、このネットワーク効果をローカルな効果とグローバルな効果に分類することができる。リンク接続によって関係しているプレイヤーからなる部分集合だけをネットワーク全体から取り出して、この取り出された部分集合に含まれるプレイヤーによるゲームを考える。つまり、ネットワーク上で直接的に影響を及ぼし合うプレイヤーの集合からなるゲームを独立させて分析する。こうした考え方に従って定式化されるネットワーク・ゲームをグラフィカル・ゲーム (graphical game) と言う。情報科学の領域では、ネットワーク上での隣人効果を考慮した意思決定問題はグラフィカル・ゲームとして定式化されてきた。グラフィカルゲームの定式化は Kearns et al.(2001) によって導入され、グラフィカルゲームにおけるナッシュ均衡の拡張としての correlated equilibiurm の概念が Karade et al.(2003) によって提唱された[*2]。

本稿の前半ではネットワーク構造を所与とする前提でネットワーク・ゲームが行われる世界を考察の対象とする。次節では、各プレイヤー間の相互依存関係をローカルなネットワーク効果に限定したケースにおいて、ゲーム論的な分析を試みる。グラフィカル・ゲームの例として、ローカル公共財のネットワーク・ゲームとベスト・ショット公共財のゲームを取り上げ、ネットワーク・ゲームのナッシュ均衡の特徴を分析する。完備情報下でのグラフィカル・ゲームの特徴を理解した後、2 次線形利得関数を持つネットワーク・ゲームを取り上げ、グラフィカル・ゲームで得られる最適戦略に関する結論といかなる側面で異なる性質を持つのかを説明する。第 3 節で、各プレイヤーの持つ情報が不完備である場合、グラフィカル・ゲームのナッシュ均衡解の特徴がどのように修正されるかを考察する。とりわけ、各プレイヤーの最適戦略と彼の次数（隣人数）の大小がある相関関係を持つことを演繹する。

本稿の後半で、ネットワーク・リンクが各プレイヤーの経済的動機に基づいて内生的に形成されると世界を対象とする。第 4 節で、ネットワークリンクの形成ゲームを取り上げ、ナッシュ均衡におけるネットワーク構造の社会的な効率性と安定性について分析する。リンク形成が一方向的な場合と両方向的なケースのそれぞれ

[*1] よりテクニカルな分析を含む解説書として、Goyal(2007) および Vega-Redondo(2007) を参照のこと。

[*2] グラフィカルゲームの簡潔な解説については、Kearns(2007) の解説を参照のこと。

のモデルにおいて、ネットワークの効率性と安定性についての特徴を分析する。その後、リンク形成ゲームとリンク接続後の隣人との間の社会的交渉ゲームを同一モデル内で統合することを試みる。各プレイヤーの最適戦略の動的調整過程を確率的摂動過程と定式化できるので、マルコフ過程における確率的安定性なる概念を用いて、動学的ネットワーク・ゲームの均衡の特徴を説明する。最後に、残され課題を指摘して結びとする。

2 完備情報下のネットワーク・ゲーム

2.1 グラフィカル・ゲームの定式化と簡単な例

あるプレイヤー i の利得は、ネットワーク上でノード i に接続しているプレイヤー達の行為水準の上昇によって増加したり、あるいは減少する。いわゆる、ネットワーク効果としての外部効果が存在する。プレイヤー i に直接的間接的に接続しているプレイヤー達の行為水準の増加が、プレイヤー i の利得を増大させるとき、正の外部効果が生まれるといい、プレイヤー i の利得を減少させるとき、負の外部効果が生じるという。プレイヤー i に直接的間接的に接続しているプレイヤー達の行為水準の増加が、プレイヤー i の限界的利得を増大させるとき、この行為は戦略的補完性 (strategic complements) を持つという。反対に、プレイヤー i の限界的利得を減少させるとき、この行為は戦略的代替性 (strategic substitutes) を持つという。以下で、正確な定義を与える。

ネットワークにおけるゲームは、プレイヤー（ノード）の集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$、各プレイヤー（ノード）の戦略 X、ネットワークにおける各プレイヤー（ノード）の連結関係 g によって記述される。各プレイヤーの戦略は、どのような意思決定をするか、あるいは、どのノードと交渉するか、例えば、新製品を購入するかどうか、新製品開発するかどうか、どの取引業者と取引関係を結ぶか、あるいはどの交通ルートを経由するかなどという選択行為になる。各プレイヤーが得られる利得の大きさを測る効用関数あるいは利得関数を導入する。プレイヤー i がとる戦略（行為）を $x_i \in X$ とする。ここで、X は、離散的な有限集合、あるいは、実数値集合 R のコンパクトな凸部分集合である。戦略集合はすべてのプレイヤーで同一であると仮定する。プレイヤー i の利得（効用）u_i は、各プレイヤーの戦略の組（戦略プロファイル）$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が与えられるとき、$u_i : X^n \to R$ と定義される。$x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ はプレイヤー i 以外のすべてのプレイヤーの戦略の組である。ゲーム理論の解概念であるナッシュ均衡を定義する。

定義 2.1 (ナッシュ均衡)
戦略プロファイル $x^* = (x_i^*, x_{-i}^*)$ が、条件

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X, \forall i \in N,$$

を満たすならば、戦略プロファイル x^* はナッシュ均衡であるという。

ナッシュ均衡では、各プレイヤー i は、ライバルの戦略プロファイル x_{-i}^* を予想した上で、自己の利得を最大にする戦略 x_i^* を選択している。ゲーム理論で周知の通り、各プレイヤーの戦略集合 X が R のコンパクトで、凸な部分集合で、利得関数がすべてのプレイヤーの戦略に関して連続で、自身の戦略の凹関数であるとき、ナッシュ均衡が存在する。各プレイヤーが取る戦略プロファイル $x \in X^n$ が与えられるときの、利得のプロファイルを $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ と表記する。もし二つの戦略プロファイル $x, x' \in X^n$ に対して、すべてのプレイヤーの利得が不等式 $u_i(x) \geq u_i(x')$ を満たし、かつ、$u_j(x) > u_j(x')$ なる条件を満たすような利得を持つプレイヤー j が存在するとき、利得プロファイル $u(x)$ は利得プロファイル $u(x')$ を優越する、または支配する (dominate) という。

定義 2.2 (パレート効率性)
利得プロファイル $u(x)$ を優越する実現可能な利得プロファイル $u(x'), x' \in X^n$ が存在しないならば、利得プロファイル $u(x)$ はパレート効率的であるという。すべての実現可能な戦略プロファイル $x' \in X^n$ に対して、

$$\sum_{i\in N} u_i(x) \geq \sum_{i\in N} u_i(x')$$

が成立するならば、戦略プロファイル x は（単純に）効率的であるという。

各プレイヤーの利得合計を最大化する戦略プロファイルはパレート効率的な戦略となるが、その逆は成立しない。

外部性および戦略的補完性と代替性に関する概念を定義する*3。プレイヤー i の隣人の戦略プロファイルは $x_{N_i} = (x_j)_{j\in N_i}$ と表現する。ここで、N_i はノード i に直接的にリンク接続されているノード（隣人）の集合である。数学的には、$N_i = \{j:\ g_{ij} = 1,\ i \neq j,\ j \in N\}$ と定義される。ネットワーク上の外部効果を 2 種類に分けて考える。最初に、隣人の行為のみがもたらす外部効果（局所的効果）を取り上げる。この場合、外部効果による利得を $f_i : X^{d_i} \to R,\ d_i = |N_i|$ と定義する。従って、プレイヤー i が得る外部効果による利得は、例えば、

$$f_i(x_i, x_{N_i}) = f_{d_i}(x_i, x_{N_i}),\ d_i = |N_i|$$

で与えられる。この利得関数の定義では、同一数の隣人（同一次数）を持つプレイヤーの利得は同じになる。また、利得の大きさは隣人の行為の組合せの順列に依存しない。

ネットワーク上の各プレイヤーの行為が直接的にリンクされていないプレイヤーにも外部効果をもたらす。直接的にリンクされていない他のすべてのプレイヤーへの外部効果（グローバル効果）が同一であるケースを考える。この場合、外部効果による利得を $h_i : X^{n-N_i-1} \to R$ と定義できる。よって、プレイヤー i が得られるグローバルな外部効果による利得は

$$h_i(x_{N-i-N_i}) = h_{d_i}(x_{N-i-N_i}),\ d_i = |N_i|$$

と与えられる。これら二つの外部効果をあわせたプレイヤー i の利得 u_i は以下の効用関数

$$u_i(x_i, x_{-i}) = u(x_i, x_{N_i}, x_{N-i-N_i}) = u_i(x_i, f_i(x_i, x_{N_i}), h_i(x_{N-i-N_i}))$$

で表現できる。

定義 2.3 (局所的外部性)
プレイヤー i の任意の戦略 x_i、およびプレイヤー i の隣人 N_i の戦略プロファイル $x_{N_i}, x'_{N_i} \in X^d$ に対して $(d = |N_i|)$、不等式 $x_{N_i} \geq x'_{N_i}$ が成立するとき、不等式 $f_i(x_i, x_{N_i}) \geq f_i(x_i, x'_{N_i})$ が成立つならば、局所的外部効果は正の外部効果をもつと言う。反対に、不等式 $f_i(x_i, x_{N_i}) \leq f_i(x_i, x'_{N_i})$ が成立つならば、局所的外部効果は負の外部効果をもつと言う。

定義 2.4 (補完性と代替性)
プレイヤー i の二つの戦略 $x_i > x'_i$、およびプレイヤー i の隣人 N_i の戦略プロファイル $x_d, x'_d \in X^{d_i}$ に対して $(d_i = |N_i|)$、不等式 $x_{N_i} \geq x'_{N_i}$ が成立するとき、不等式 $f_i(x_i, x_{N_i}) - f_i(x'_i, x_{N_i}) \geq f_i(x_i, x'_{N_i}) - f_i(x'_i, x'_{N_i})$ が成立つならば、局所的外部効果は戦略的補完性をもつと言う。反対に、不等式 $f_i(x_i, x_{N_i}) - f_i(x'_i, x_{N_i}) \leq f_i(x_i, x'_{N_i}) - f_i(x'_i, x'_{N_i})$ が成立つならば、局所的外部効果は戦略的代替性をもつと言う。

*3 これらの定義は Goyal(2008) が提案した考え方に基づく。

ここでは、ローカルなネットワーク効果のみを明示的に導入したモデル、グラフィカル・ゲームを考える。グラフィカル・ゲームでは、各プレイヤーの隣人の行為だけがネットワーク効果をもたらすので、グローバルなネットワーク効果はゼロ、$h_i = 0$ なので、プレイヤー i の利得関数は

$$u_i(x_i, x_{N_i}) = u_{d_i}(x_i, f_i(x_{N_i}))$$

とおいてもよい。各プレイヤーの利得は彼自身の戦略と隣人達の戦略の関数となる。

例 2.1 (利得が隣人達の行為の和に依存するケース)
プレイヤー i の利得関数は、i が行為 x_i を選択し、彼の隣人プレイヤー N_i が行為プロファイル x_{N_i} を選んでいるとき、

$$u_d(x_i, x_{N_i}) = f(x_i + \lambda \sum_{j \in N_i} x_j) - c(x_i),\ d = |N_i|$$

で与えられる。ここで、$f(\cdot)$ は非減少関数で、$c(\cdot)$ は i が行為を実行することに関わる費用関数である。パラメター λ はネットワーク効果の度合いを示す指標である。通常、$0 < \lambda \leq 1$ である。

$\lambda = 1$ で、f が凹関数であり、c が線形もしくは増加関数であるケースは、Bramoullé and Kranton(2007) によって定式化されたローカル公共財モデルに帰着する。f が凹関数であるとする仮定は戦略的代替性のモデルに特定化することになる。他方で、f を凸関数と仮定するときは、Goyal and Moragan-Gonzalez(2001) の戦略的補完性のモデルとなる。

例 2.2 (利得が隣人達の行為の平均値に依存するケース)
戦略集合が $\{0, 1\}$ となっている。つまり、戦略が *0* または *1* の *2* 種類しか選べない。プレイヤー i の利得関数は、i が行為 x_i を選択し、彼の隣人プレイヤー N_i が行為プロファイル x_{N_i} を選んでいるとき、

$$u_d(x_i, x_{N_i}) = x_i \cdot f(\frac{\sum_{j \in N_i} x_j}{d}) - c(x_i),\ d = |N_i|$$

となっている。ここで、f は増加関数である。このモデルは戦略的補完性を兼ね備えている。

2.2 ローカル公共財のネットワーク・ゲーム

ある経済主体が生産した便益が、当該主体に帰属するのみならず、その一部であれ、他の経済主体にもスピルオーバーする性質は公共財としての性質でもある。各企業が新製品開発のための研究を行うとき、他の企業が行っている研究から得られた技術情報が他の企業にスピルオーバーすることはよく知られた事実である。また、新製品の購入を行うとき、その性能や技術的な性質に関する情報を得ることは重要な役割を果たすが、そうした情報の入手可能性は隣人達が持つ情報に大きく依存する。少数の主体が非常に詳しい情報を入手し、そうした人々が新製品の購入やイノベーションの拡散において需要な役割を果たしている。社会的ネットワークの構造が新製品の購入やイノベーションの拡散にどのよう影響を及ぼすか、言い換えると、公共財の供給量といかなる関係があるのか、という問題を分析するための、Bramoullé and Kranton(2007) は戦略的代替性を持つグラフィカル・ゲームを活用した。このモデルを B-K モデルと呼ぶことにする。

B-K モデルを定式化する。$x_i \in X = [0, \infty)$ をプレイヤー i の行為（情報探索努力あるいは研究努力の）水準とする。プレイヤー i の利得関数は、i が行為 x_i を選択し、彼の隣人プレイヤー N_i が行為プロファイル

x_{N_i} を選んでいるとき、

$$u_i(x_i, x_{N_i}) = f(x_i + \sum_{j \in N_i} x_j) - cx_i,$$

である。$c > 0$ は努力の限界費用で、$f(0) = 0,\ f'(\cdot) > 0,\ f''(\cdot) < 0$ である。このゲームは正の局所的外部性と戦略的代替性で特徴づけられる。戦略集合はコンパクトな凸集合であり、利得関数は連続な凹関数であるから、ナッシュ均衡が存在する[*4]。

各プレイヤーの利得最大化の 1 階条件は、$f'(x^*) = c$ である。$\bar{x}_i = \sum_{j \in N_i} x_j$ と表記する。関数 f の凹性から、$\bar{x}_i \geq x^*$ ならば、プレイヤー i の限界収入は限界費用を下回るので、プレイヤー i の最適な努力は $x_i = 0$ となる。反対に、$\bar{x}_i \leq x^*$ ならば、プレイヤー i の最適な努力水準は $x_i = x^* - \bar{x}_i$ である。このことから以下の補題が成立する。

補題 2.1
すべてのプレイヤー i に対して、*(1)* $\bar{x}_i \geq x^*$ かつ $x_i = 0$、または、*(2)* $\bar{x}_i \leq x^*$ かつ $x_i = x_i^* - \bar{x}_i$ のとき、そしてそのときにのみ、戦略プロファイル $x = (x_i, x_{N_i})$ はナッシュ均衡となる。

この補題が示している通り、各プレイヤーの努力水準は戦略的代替関係にあり、隣人達の努力水準が上昇すれば、自身の努力水準を減少させる。よって、努力をするプレイヤーと努力しないでフリーライドするプレイヤーが共存する可能性が生じる。プレイヤーが最大限の努力をする $x_i = x^*$ か、または、まったく努力しない $x_i = 0$ かのどちらかを選択している均衡が存在する可能性がある。この均衡における戦略プロファイルを特化している (specialized equilibrium) 戦略と呼ぶ。特化した均衡で、最大限の努力をするプレイヤーをスペシャリストと呼ぶ。すべてのプレイヤーがある程度の努力を果たしている均衡における戦略 $x_i (0 < x_i < x^*)$ を分布している (distributed) 戦略という。

下の図はノード数が 4 のときの 3 種類のネットワークにおけるナッシュ均衡の例を示している。(a) は完全ネットワークにおけるナッシュ均衡、(b) はスター型ネットワーク、(c) は円周上のネットワークの例をあげている。(a) および (c) の左側にある均衡は分布した戦略に対応し、右側は特化した戦略に対応する。スター型ネットワークでは、特化した戦略のみがナッシュ均衡になる。

[*4] ナッシュ均衡の存在定理はゲーム理論のテキストを参照のこと。

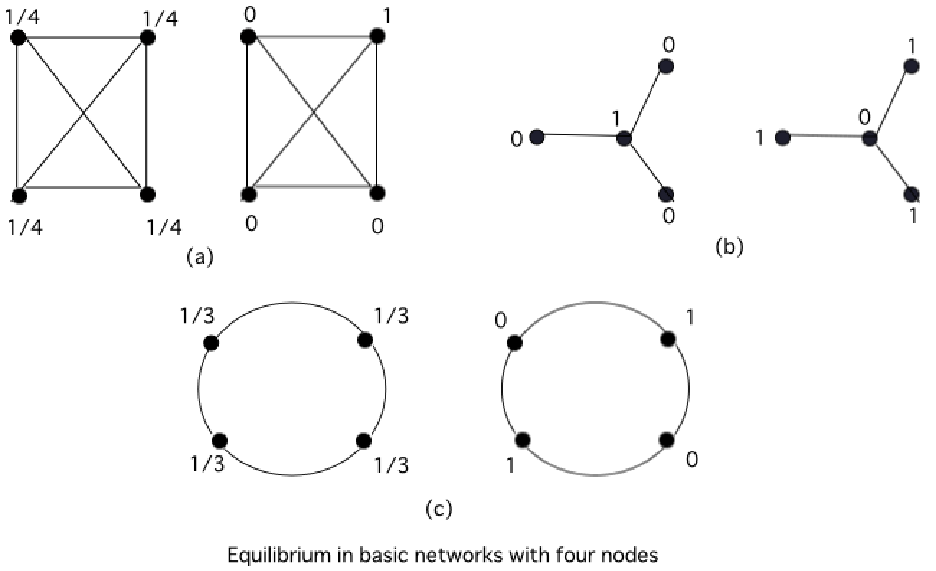

Fig.1　ナッシュ均衡の例 ($x^* = 1$ のケース)

ネットワーク上のノードの集合 N の部分集合 I で、すべての $i, j \in I$ に対して、$g_{ij} = 0$ となる条件を満たすノードの集合 I を独立な集合 (independent set) という。すなわち、集合 I から任意に選んだ２つのノードはリンク接続していない。独立な集合の中で、他の独立な集合に含まれない独立な集合を最大な独立集合 (maximum independent set) という。ただ一つのノードからなる独立集合も認める。このとき、どのようなリンク・パターンのネットワークも最大な独立集合が存在する。最大な独立集合に属さないノードを任意に選んだとき、そのノードが最大な独立集合内のノードの中で r 個以上のノードとリンク接続しているとき、次数 r の最大な独立集合という。

各プレイヤーの努力は戦略的代替関係にあるので、特化した均衡では、二人のスペシャリストが互いにリンク接続していてはいけない。言い換えると、特化した均衡では、スペシャリストの集合は独立な集合になっている筈である。このことから、以下の定理が成立することが分かる。

定理 2.1 (特化した均衡の存在)
特化した均衡がナッシュ均衡になるための必要十分条件は、均衡におけるスペシャリストの集合が最大な独立集合となっていることである。すべてのネットワークにおいて最大な独立集合が存在するので、特化したナッシュ均衡が必ず存在する。

上の図に描かれている通り、完全なネットワークでは、独立集合はただ一つのノードだけを含むので、それが最大な独立集合となる。この独立集合は４種類存在するので、特化した均衡はこの独立集合に対応して、４種類存在する。スター型では、中心ノードだけからなる独立集合と、３つの周辺ノードから構成される独立集合が存在する。この２種類の最大な独立集合に対応して、特化した均衡が存在する。円周上で連結されたネットワークでは、対角線同士の２つのノードからなる最大な独立集合が存在するので、これに対応して２つの特化した均衡が存在する。

特化したナッシュ均衡はいかなるネットワークにも存在するが、すべてのプレイヤーが均等に貢献する均衡、分布した均衡は存在するのだろうか。上のスター型ネットワークで既に見た通り、この答えは否である。では、どのようなネットワークでなら、分布した均衡は存在するのだろうか。すべてのノードが同一の次数

(隣人数）をもつネットワーク、正規ネットワーク (regular network) では分布した均衡が存在することは容易に分かる。例えば、すべてのプレイヤーが次数 k を持つ正規ネットワークを考えてみよう。すべてのプレイヤーが同一の努力 $\hat{x}$ で貢献しているとすると、各プレイヤーの採用する戦略の最適条件は $f'(\hat{x}+k\hat{x})=c$ となる。$\hat{x}+k\hat{x}=x^*$ でなければならないので、各プレイヤーは $\hat{x}_i=x^*/(k+1)$ の努力を提供する。これが分布した均衡になっている。こうして、分布している均衡の存在はネットワークの構造と大きく関係している。

今までの分析から明白なように、特化した均衡、分布した均衡など、複数のナッシュ均衡が存在する。安定なナッシュ均衡になるための条件は何かを考えてみる。プレイヤーの戦略プロファイル x を与えたときの、プレイヤー i の最適反応関数を $z_i(x)$ とする。$z(x)=(z_1(x),\dots,z_n(x))$ とおく。ナッシュ均衡 x が安定であるための必要十分条件は、$|\epsilon_i|\le\rho,\ x_i+\epsilon_i\ge 0$ を満たす任意の実数ベクトル $\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n)$ に対して、系列 $x^{(k+1)}=z(x^{(k)}),\ x^{(0)}=x+\epsilon$ が戦略プロファイル x に収束するような、正の実数値 ρ が存在することである。

分布している均衡では、すべてのプレイヤーがある程度の努力をしている。このとき、各プレイヤー i の努力水準を限界的に減少させると、彼の隣人達は自身の努力水準を限界的に増加させるのが最適反応となる。この隣人達の反応はプレイヤー i の努力水準を更に減少させる誘因となる。従って、プレイヤー i の努力水準は元に戻らない。つまり、この均衡は安定ではない。特化した均衡だけが安定な均衡になりうる。例えば、、フリーライドしているプレイヤーが二人のスペシャリストにリンク接続している場合、どちらかのスペシャリストの努力水準を限界的に減少させても、フリーライダーが努力をしようとする誘因は働かない。

定理 2.2 (安定な均衡)
均衡が安定であるための必要十分条件は、均衡が特化しており、すべての非スペシャリスト（フリーライダー）が少なくとも二人のスペシャリストにリンク接続していることである。よって、安定な均衡が存在するための必要十分条件は、ネットワークが次数 2 以上の最大な独立集合を持っていることである。

スター型ネットワークで、中心ノードがスペシャリストになっている例では、最大な独立集合は次数が 1 である。よって、この均衡は安定ではない。周辺部の 3 つのノードがスペシャリストになっている均衡では、最大な独立集合の次数は 2 以上となっている。この均衡は安定である。

ネットワーク・ゲームにおける社会的厚生の問題を考える。各プレイヤーが戦略プロファイル $x=(x_1,\dots,x_n)$ を採用しているときの社会的厚生は

$$W(x)=\sum_{i\in N}[f(x_i+\sum_{j\in N_i}x_j)-cx_i]$$

で定義される。

戦略プロファイル x が効率的であることの必要十分条件は、$W(x')>W(x)$ となるような異なる戦略プロファイル x' が存在しないことである。社会的に効率的な戦略プロファルは、正の努力 $x_i>0$ をもつ各プレイヤー i に対して、最適性の条件

$$f'(x_i+\bar{x}_i)+\sum_{j\in N_i}f'(x_j+\bar{x}_j)=c$$

を満たす。左辺はプレイヤー i の努力の社会的限界便益である。また、フリーライドするプレイヤー i ($x_i=0$) に関しては、$\partial W(x)/\partial x_i<0$ とならなければならない。社会的最適性の条件は、努力の社会的限界便益（個人的限界便益とその隣人達の限界便益の合計）が限界費用に一致することである。しかし、いかなる均衡でも、各プレイヤーは、努力の個人的限界便益と限界費用を均等化させる戦略を選ぶ。$f'(x_i+\bar{x}_i)=c$ が成立し

ている。社会的限界便益は各プレイヤーの個人的限界便益とその隣人達の限界便益の合計であるから、社会的限界便益の方が個人的限界便益よりも大きい。よって、均衡では社会的最適性の条件は満たされていない。社会的効率性に関して容易に分かることは、いかなるナッシュ均衡も効率的ではないということである。

次数 k をもつ正規ネットワークで、効率的な戦略プロファイルの特徴を考える。各プレイヤーが同一の努力水準で貢献するとすると、社会的最適性の条件は $(k+1)f'(x_i+\bar{x}_i)=c$ となる。各プレイヤーがこの条件を満たすような努力 x_i で貢献すれば、効率的な配分が実現できる。このとき、各プレイヤーの限界費用は $c/(k+1)$ となる。

非正規形ネットワークを考えると、スター型で典型的に観察された通り、必ずフリーライダーが登場する。効率的な戦略プロファイルが努力ゼロのプレイヤーを含む可能性がある。

ナッシュ均衡は非効率であるが、どのナッシュ均衡が最も高い社会的便益をもたらすかを考えてみる。いかなるナッシュ均衡でもすべてのプレイヤーは少なくとも $f(x^*)$ の大きさの便益を受け取る。ネットワーク上のノード数が n であるとき、最小の社会的便益は $nf(x^*)$ となっている。特化したナッシュ均衡では、幾人かのプレイヤーはスペシャリストとして x^* の努力で貢献するが、これ以外のプレイヤーはフリーライドする。フリーライダー達の追加的便益は $\sum_{j:x_j=0}[f(\bar{x}_j)-f(x^*)]$ で与えられる。ナッシュ均衡 x における社会的厚生は

$$W(x)=nf(x^*)+\sum_{j:x_j=0}[f(\bar{x}_j)-f(x^*)]-c\sum_i x_i$$

で表現できる。右辺の第 2 項は便益プレミアム (benefit premium) と呼ばれる。この便益プレミアムは特化した均衡においてのみ生まれる。言い換えると、分布した均衡では、こうした追加的便益は生じない。特化した均衡はこの便益プレミアムを生み出すが、より大きい努力費用を必要とするかも知れない。特化による便益プレミアムの方が追加的努力費用よりも大きいとき、特化した均衡の方がより大きい社会的便益を生み出す。このトレード・オフの方向性を決めるのは利得関数 $f(\cdot)$ の数学的形状である。x^* 近傍で、利得関数 f のスロープが限界費用 c よりも大きな傾斜をもつならば、便益プレミアムは努力の追加的費用よりも大きくなる。この場合、特化した均衡の方が分布した均衡よりも大きな社会的便益をもたらす。さらに、スペシャリストがより多数の隣人を持つほど、便益プレミアムは大きくなるので、社会的便益も大きくなる。

ネットワークに新しいリンクを追加するとき、社会的厚生は上昇するのだろうか。一見すると、リンク数の増加は互いの努力を共有するプレイヤー数を増大させることになるので、良いことのように思える。この予測は、リンクの追加によって各プレイヤーの努力水準が影響を受けない場合は、確かに正しい。しかし、新たなリンクの追加があるプレイヤーの努力水準を変化させるならば、必ずしも正しくない。下の図を参照のこと。

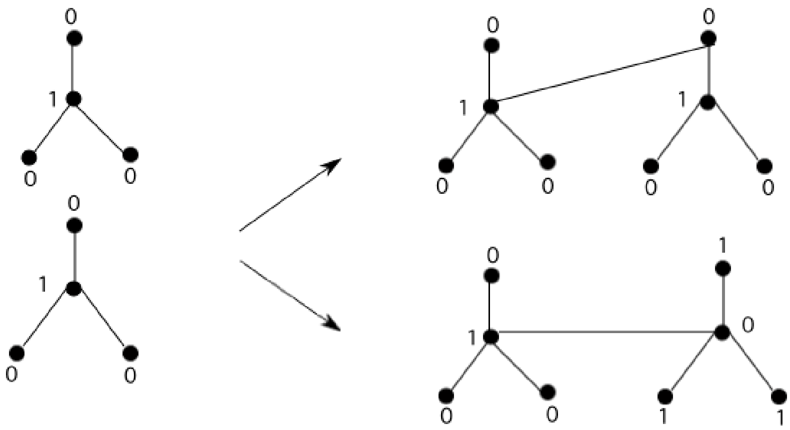

Fig.2　新しいリンク追加の例

この図は、中心ノードがスペシャリストになっているネットワーク同士を新しいリンクで接続した例を示している。中心ノードと周縁部ノードを新しいリンクで接続したときは、元のスター型ネットワークにおける均衡状態に影響を与えない。よって、この追加的リンク接続によって、元の均衡状態は維持される。他方で、中心ノード同士をリンク接続すると、元のナッシュ均衡は維持不可能となる。なぜなら、拡大されたネットワークのナッシュ均衡では、中心ノードのうちどちらかがフリーライダーとなる必要がある。このとき、追加的便益プレミアムよりも努力の追加的な費用の方が大きければ、つまり、条件 $2cx^* > f(4x^*) - f(x^*)$ が成立すれば、社会的便益は減少する。この例が明確に示していることは、新しいリンク接続によって社会的便益が減少する必要条件は、追加的リンク接続がスペシャリスト同士をリンクさせるようなネットワークの拡大になっていることである。

フリーライダーが存在するような特化したナッシュ均衡の方が、分布した均衡よりもより高い社会的厚生を実現する可能性があることが理解できた。しかし、以上のことからも理解される通り、ネットワークのリンク構造と均衡における社会的便益の大小関係を明確に示す研究課題は未だ未解決である。各ノードの次数が増大するとき、あるいは、ネットワークリンク接続が稠密になるにつれて、社会的便益は増加するか否かという案件も、幾つかの特殊例を提示することは出来ても、一般的なモデルで分析することに関しては未解決である。

2.3　ネットワーク・ゲームの閾値モデル

閾値モデルの例を 3 種類取り上げる。

例 2.3 (補完性を持つ閾値ゲーム)
各プレイヤーは戦略集合 $\{0,1\}$ を持つ。行為 1 を採用することから得られる便益は行為 1 を選択する隣人数の増加と共に増大する。例えば、

$$u_i(1, x_{N_i}) \geq u_i(0, x_{N_i}) \;\Leftrightarrow\; \sum_{j \in N_i} x_j \geq t_i$$

となっているとする。i の隣人のうち t_i 人以上が行為 1 を選択している限り、i は行為 1 を選択した方が良い。

反対に、t_i 未満の隣人しか行為 1 を選んでいないときは、i は行為 0 を選択すべきである。このとき、t_i は行為 1 の閾値である。行為 1 が費用を伴う場合に、この現象が起きる。例えば、利得関数が

$$u_i(1, x_{N_i}) = a_i \sum_{j \in N_i} x_j - c_i \, ; \; u_i(0, x_{N_i}) = 0$$

となっている時に起きる。ここで、$a_i > 0, \; c_i > 0$ である。このとき、行為 1 の閾値は $t_i = c_i/a_i$ となる。

例 2.4 (ベスト・ショット公共財のゲーム)
プレイヤー i が行為 1 を選んでいる、または、i の隣人の誰かが行為 1 を選択しているとき、i の利得が 1 になる。ただし、行為 1 を実行するためには費用 $c, \; 0 < c < 1$ がかかるとする。利得関数は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} &u_i(1, x_{N_i}) = 1 - c, \\ &u_i(0, x_{N_i}) = 1, \quad x_j = 1 \text{ となる } j \in N_i \text{ が存在するとき} \\ &u_i(0, x_{N_i}) = 0, \quad x_j = 0, \forall j \in N_i \text{のとき}. \end{aligned}$$

例 2.5 (流行ゲーム)
2 種類のタイプのプレイヤーが存在する。一つのタイプは順応者であり、もう一つは反逆者である。順応者は隣人達の多数派の行為に調和する行為を選び、反逆者は隣人の多数派に反対する行為を選ぶ。（これはマッチング・ペニーのゲームと同一の構造となっている。）ゲーム論で周知の通り、順応者と反逆者がリンク接続しているネットワークでは、純粋戦略のナッシュ均衡は存在しない。混合戦略のナッシュ均衡は存在する。

上記の例を一般化して、各プレイヤーの利得関数が隣人の数（次数）に依存するモデルを定式化する。閾値モデルの特徴は、各プレイヤーの利得が隣人のうちの誰が行為 1 を選択したかには影響されず、行為 1 を選択した隣人の割合に影響を受けることである。今まで通り、プレイヤー i の隣人の集合は N_i であり、次数は $d_i = |N_i|$ で与えられる。隣人の中の m 人が行為 1 を選択しているとき、プレイヤー i の利得を $u_i(x_i, x_{N_i}) = u_{d_i}(x_i, m)$ と表現することが許される。$x_i \in \{0, 1\}$ とする。

もし、すべての d と $m \geq m'$ に対して、

$$u_d(1, m) - u_d(0, m) \geq u_d(1, m') - u_d(0, m')$$

が成立するとき、戦略的補完関係があるという。この不等式が反対方向で成立てば、つまり、すべての d と $m \geq m'$ に対して、

$$u_d(1, m) - u_d(0, m) \leq u_d(1, m') - u_d(0, m')$$

であるならば、戦略的代替関係が成立しているという。（ベスト・ショット・ゲームは戦略的代替性を持つゲームである。）

純粋戦略のナッシュ均衡は以下の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} &x_i = 1 \text{ ならば, } u_{d_i}(1, m) \geq u_{d_i}(0, m), \\ &x_i = 0 \text{ ならば, } u_{d_i}(0, m) \geq u_{d_i}(1, m). \end{aligned}$$

この均衡条件は、各プレイヤーが、彼の隣人の戦略に対して、最大の利得を受け取れる戦略を選択していることを意味する。この均衡条件を満たすナッシュ解は複数存在する可能性がある。

戦略的補完性をもつ閾値ゲームを取り上げる。この場合、隣人のうち $t(d)$ 人以上が行為 1 を選んでいるとき、プレイヤーの最適戦略は行為 1 を選択することであり、隣人の中で $t(d)$ 人未満が行為 1 を選んでいるときは行為 0 を選択することが最適戦略となるような、次数 d の関数 $t(d)$（閾値という）が存在する。下の図は閾値 2 の戦略的補完性を持つグラフィカル・ゲームの例における 2 つのナッシュ均衡を示したものである[*5]。

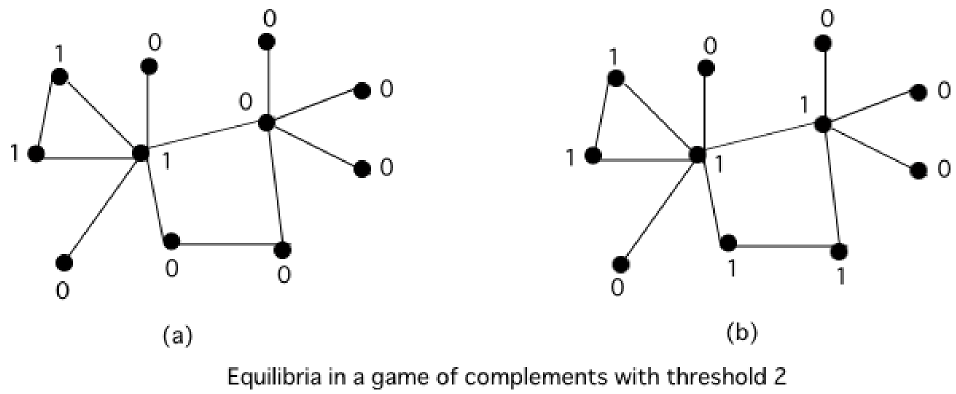

Fig.3　戦略的補完のゲーム

この図に描かれた均衡の他にもナッシュ均衡は存在する。すべてのプレイヤーが行為 0 を選択するケースに対応する均衡である。

戦略的代替関係のあるゲームでは、これとは反対の戦略が最適戦略となる。つまり、プレイヤー i の隣人のうち閾値 $t(d)$ 人以上のプレイヤーが行為 1 を選んでいるとき、プレイヤー i の最適戦略は行為 0 を選択することである。下の図はベストショット公共財のゲーム (閾値 $t(d) = 1$ のケース) におけるナッシュ均衡の例を示している。

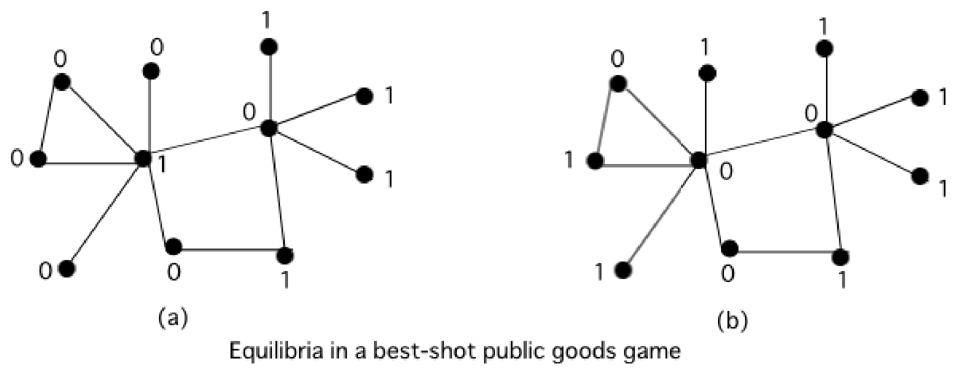

Fig.4　ベストショット公共財のゲーム

以上の例からも容易に推測できるように、戦略的補完関係を持つゲームでは、純粋戦略のナッシュ均衡が存在する。この純粋戦略均衡は完備ラティスと呼ばれる性質を備えている。このことは最大均衡と最小均衡が存在することを意味する。ベストショット公共財のゲームではナッシュ均衡は存在するが、一般的には、戦略的代替関係を持つゲームでは、純粋戦略のナッシュ均衡が存在するとは限らない。純粋戦略のナッシュ均衡が存在する場合、複数個の均衡が存在することが起こりうる。

[*5] この図は、Jackson(2008) からの引用である。

2.4　2 次線形利得を持つネットワーク・ゲーム

例 2.6 (利得が 2 次線形関数)
i が行為 x_i を選択し、彼の隣人プレイヤー N_i が行為プロファイル x_{N_i} を選んでいるとき、プレイヤー i の利得関数は、

$$u_i(x_i, x_{N_i}) = \alpha_i x_i + \frac{1}{2}\sigma_{ii}x_i^2 + \sum_{j\in N_i}\sigma_{ij}x_i x_j$$

で与えられる。ここで、行為の水準に関して厳密に凹関数であると仮定する。言い換えると、$\partial^2 u_i/\partial x_i^2 = \sigma_{ii} < 0$ と仮定している。さらに、$\alpha_i = \alpha > 0$、および、すべての i に対して $\sigma_{ii} = \sigma < 0$ と仮定する。$\sigma_{ij} > 0$ のとき、戦略的補完性が成立する。反対に、$\sigma_{ij} < 0$ のときには、戦略的代替性が成立する。

この例は、隣人 N_i の行為からの効果のみが利得に影響しているので、グラフィカルゲームとなっている。ここでは、上の例を、Ballester, Colvó-Armengol and Zenou(2006) によって定式化されたモデル、プレイヤーの採用する行為が友人関係を介して、直接的間接的互いに影響を与え合う戦略的補完関係をもつ（グラフィカル・ゲームではない）ネットワーク・ゲームに一般化する。今までと同じく、ネットワークにおけるゲームは、プレイヤー（ノード）の集合 N、各プレイヤー（ノード）の戦略 X、ネットワークにおける各プレイヤー（ノード）の連結関係 g によって記述される。各プレイヤー i の利得関数は 2 次線形関数

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \alpha_i x_i + \frac{1}{2}\sigma_{ii}x_i^2 + \sum_{j\neq i}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \tag{1}$$

で与えられるとする。$\partial^2 u_i/\partial x_i x_j = \sigma_{ij},\ i \neq j$ はプレイヤー i と j の間の相互関係の強さを表しており、負の値もしくは正の値を取りうる。$\sigma_{ij} > 0$ のとき、i と j の戦略は補完関係があり、プレイヤー j の努力の増加が i の努力水準を引き上げることを意味する。以下では、このケースを想定する。

相互依存の大きさを表すクロス効果の行列を $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ と表記する。クロス効果行列 $\mathbf{\Sigma}$ を計算上便利な形式に変形する。このために、

$$\underline{\sigma} = \min\{\sigma_{ij} \mid i \neq j\},\ \bar{\sigma} = \max\{\sigma_{ij} \mid i \neq j\},\ \gamma = -\min\{\underline{\sigma}, 0\},\ \lambda = \bar{\sigma} + \gamma$$

とする。$\sigma_{ii} = \sigma < \min\{\underline{\sigma}, 0\}$ と仮定する。戦略的補完性のとき、$\underline{\sigma} > 0$ なので、$\sigma < 0$ となっており、$\gamma = 0,\ \lambda = \bar{\sigma}$ となる[*6]。

$$i \neq j \text{ のとき},\ g_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \gamma}{\lambda};\ i = j \text{ のとき},\ g_{ii} = 0$$

と新しい変数（リンク接続における補完関係の相対的大きさ）を定義する。明らかに、$0 \leq g_{ij} \leq 1$ である。ここで、新しいクロス効果の行列 $\mathbf{G}$ を、$\mathbf{G} = [g_{ij}]$ と定義する。この行列の対角線上の要素は 0 である。最後に、$\beta = -\sigma - \gamma$ と、β を定義する。$\beta > 0$ である。

$\mathbf{I}$ を n 次元単位行列、$\mathbf{U}$ をすべての要素が 1 である n 次元正方行列とすると、

$$\mathbf{\Sigma} = -\beta\mathbf{I} - \gamma\mathbf{U} + \lambda\mathbf{G} \tag{2}$$

*6 以下の分析は、戦略的代替性のケースを含めた一般的な定式化を前提としている。

が成立する。右辺の第一項は自身の努力の効果を表し、第 2 項はグローバルな交互作用の大きさを表現し、第 3 項は隣人達との間のローカルな相互作用の大きさを表している。このクロス効果行列の分解表現を用いると、利得関数 (1) は

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \alpha_i x_i - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)x_i^2 - \gamma \sum_{j=1}^{n} x_i x_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j \tag{3}$$

と表現できる。自身の努力に関する凹性に対するローカルな相互作用の相対的な大きさを $\lambda^* = \lambda/\beta$ で表現する。

このゲームのナッシュ均衡の内点解は、すべてのプレイヤーに対して、$x_i^* > 0$、かつ、$\partial u_i(x^*)/\partial x_i = 0$ を満たさなければならない。第一階の条件は

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \alpha_i - \beta x_i - \gamma \sum_{j=1}^{n} x_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j = 0$$

なので、行列形式では

$$[\beta \mathbf{I} + \gamma \mathbf{U} - \lambda \mathbf{G}] \cdot x = \alpha \mathbf{1}$$

となる。ただし、$\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 となっている n 次元（縦）ベクトルである。関係式 $\mathbf{U} \cdot x = \hat{x}\mathbf{1}$, $\hat{x} = x_1 + \cdots + x_n$ が成立する事実を用いると、ナッシュ均衡 x^* は

$$[\beta \mathbf{I} - \lambda \mathbf{G}] \cdot x^* = (\alpha - \gamma \hat{x}^*)\mathbf{1} \tag{4}$$

をみたす。

各プレイヤーの動機付けは直接的な隣人の努力水準から影響を受けると同時に、隣人はその隣人から影響の受け、隣人の隣人はその隣人から・・・という具合に影響を受けを受ける。各プレイヤーの努力に対する誘因は、ネットワーク上で直接的にリンクされてる他者の行為から影響をうけるのみならず、間接的にネットワークで間接的にリンクしているすべてのプレイヤーの行動から影響受ける。このネットワーク効果は、ローカルな効果とグローバルな効果に分類できる。ここでのモデルではグローバルな効果はすべてのプレイヤーで同一となっているので、各プレイヤーの努力水準は次数の大小から大きな影響を受ける。

隣接行列 $\mathbf{G}$ をもつネットワーク $\mathbf{g}$ を考える。パラメター $a \geq 0$ を与えるとき、十分小さな a に対して、逆行列

$$\mathbf{M}(\mathbf{g}, a) = [\mathbf{I} - a\mathbf{G}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathbf{G}^k$$

を定義できる。ただし、$\mathbf{G}^0 = \mathbf{I}$ とする。$\mathbf{M} = [m_{ij}(\mathbf{g}, a)]$ とすると、$m_{ij}(\mathbf{g}, a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k g_{ij}^{[k]}$ は、ノード i から出てノード j に至る長さ k の経路の数に重み a^k をかけて、すべての経路の長さ k に関して足し合わせた大きさである。

定義 2.5 (Bonacich の中心化度指数)
隣接行列 $\mathbf{G}$ をもつネットワーク $\mathbf{g}$ において、パラメター a のもとで、逆行列 $\mathbf{M}(\mathbf{g}, a) = [\mathbf{I} - a\mathbf{G}]^{-1}$ が定義でき、非負であるとする。パラメター a をもつ *Binacich* の中心化度指数は

$$\mathbf{b}(\mathbf{g}, a) = [\mathbf{I} - a\mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

と定義される。

ノード i の Bonacich 中心化度指数は

$$b_i(\mathbf{g},a)=\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(\mathbf{g},a)=m_{ii}(g,a)+\sum_{j\neq i} m_{ij}(\mathbf{g},a)$$

である。ナッシュ均衡の条件式 (4) から逆行列を用いると

$$\beta x^*=[\mathbf{I}-\lambda^*\mathbf{G}]^{-1}[\alpha-\gamma\hat{x}^*]\mathbf{1}=(\alpha-\gamma\hat{x}^*)\mathbf{b}(\mathbf{g},\lambda^*)$$

が得られる。ここで、$\lambda^*=\lambda/\beta$ である。さらに、$\sigma_{ij}=\sigma_{ji},\ i\neq j$ と仮定する。行列 $\mathbf{G}$ の最大の固有値を $\mu_1(\mathbf{G})$ とおく。以下の定理が成立する。

定理 2.3
$[\beta\mathbf{I}-\lambda\mathbf{G}]^{-1}$ が定義でき、非負であるための必要十分条件は、$\beta>\lambda\mu_1(\mathbf{G})$ が成立することである。このとき、ネットワーク・ゲーム $\mathbf{\Sigma}$ は

$$x^*(\mathbf{\Sigma})=\frac{\alpha}{\beta+\gamma\hat{b}(\mathbf{g},\lambda^*)}\mathbf{b}(\mathbf{g},\lambda^*) \tag{5}$$

で与えられるナッシュ均衡のユニークな内点解が存在する。ただし、$\hat{b}(\mathbf{g},\lambda^*)=b_1(\mathbf{g},\lambda^*)+\cdots+b_n(\mathbf{g},\lambda^*)$ である。

ナッシュ均衡解 (5) から

$$x_i^*(\mathbf{\Sigma})=b_i(\mathbf{g},\lambda^*)\frac{\hat{x}^*(\mathbf{\Sigma})}{\hat{b}(\mathbf{\Sigma})}$$

が得られる。各プレイヤー i の努力水準は i の Bonacich の中心化度水準に比例する。スター型ネットワークでは中心ノードの中心化度指数は周縁部ノードに比べてはるかに大きい。ネットワーク上の各ノードの影響力が均質で対称的であるとき、つまり、$g_{ij}\in\{0,1\}$ であるケースを考えてみる。上記の定理に従えば、スター型ネットワークのナッシュ均衡において、中心ノードの努力水準は周縁部ノードに比べて大きいことなる。円周上にノードが位置するネットワークでは、各ノードの中心化度指数は同一になっているので、ナッシュ均衡における各ノードの貢献度は同一となる。

グラフィカル・ゲームを拡張して、直接的な隣人効果だけでなく、隣人の隣人の行為などが間接的に与える影響を明示的に定式化すると、公共財のネットワーク・ゲームで得られる結論とは異なり、各プレイヤーの最適戦略は隣人数（次数）の大きさとある種の相関関係をもつことになる。しかし、各ノードの次数の分布を所与とするとき、各ノードの隣人達に対する影響力 σ_{ij} の差異がどのようにして形成されるかは、未解決の問題である。言い換えると、各ノードの次数分布の形成と隣人効果の大小の形成は同時に決定される定式化が必要とされる。

3　不完備情報下のネットワーク・ゲーム：

3.1　不完備情報のモデル化について

前節までは、ネットワーク構造に関する情報がすべてのプレイヤーの間の共通知識であると仮定されてきた。しかし、現実の社会的なネットワークを観察すれば分かるように、各個人はネットワーク構造について非常に限られた情報しか持っていない。実証的なネットワーク研究が示している通り、社会的なネットワークに

埋め込まれている各個人は、一般的に、直接的にリンクされている隣人の行動については知っているけれど、その隣人達の隣人についてはよく知らないし、まして、隣人の隣人の隣人に関してはほとんど知らない。こうした現実の社会的ネットワークの特徴、ネットワーク上の各プレイヤーがネットワーク構造に関して不完全な情報しか持っていない事実をネットワーク・ゲームのモデルの中に明示的に定式化する必要がある。

本節をを通して、各プレイヤーはネットワーク上で直接的にリンクしているプレイヤー（隣人）数を知っているが、それ以外のネットワーク構造については次数分布だけを知っていると仮定する。ネットワークの次数分布を P と表記する。$P(d)$ は各ノードが次数 d を持つ確率である。次数分布によってネットワークの不完備情報を表現する方法は、最も簡単な方法であり、自然な考え方である。また、この方法は、ネットワークにおけるリンク接続の増加やリンク接続の変更を分析するに際しても便利である。リンク接続の増加が引き起こす効果を次数分布における第一位の確率的優越性 (first-order stochastic dominance) という概念を用いて分析できる。リンク接続の変更の効果は、次数分布における第二位の確率的優越性 (second-order stochastic dominance) の概念を用いて分析できる。

次数の累積分布関数を $\mathcal{P} : \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \ \rightarrow \ [0, 1]$ とする。つまり、

$$\mathcal{P}(d) = \sum_{k=0}^{d} P(k)$$

と定義される。P と P' が 2 つの次数分布であるとき、これらに対応する累積分布関数をそれぞれ $\mathcal{P}$、$\mathcal{P}'$ とする。

定義 3.1 (stochastic domination)
P が P' に対して第 1 位の確率的優位性を持つことの必要十分条件は、すべての $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して、$\mathcal{P}(k) \leq \mathcal{P}'(k)$ が成立つことである。
P が P' に対して第 2 位の確率的優位性を持つことの必要十分条件は、すべての $d \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して、$\sum_{k=1}^{d} \mathcal{P}(k) \leq \sum_{k=1}^{d} \mathcal{P}'(k)$ が成立つことである。

プレイヤーが次数分布と隣人数だけを知っているとき、プレイヤーは自身の隣人数を観察した後に、ネットワーク構造についていかなる学習が出来るのだろうか。もし隣人の間の次数分布が独立であるケースでは、自身の隣人数の知識は新しい情報をもたらさない。対照的に、次数分布が正の相関係数を持つケースでは、大きな次数を持つプレイヤーは隣人達も大きな次数を持つと予想する。いずれにしろ、プレイヤーの私的情報は自身の隣人数（次数）だけであり、この次数の大小がプレイヤーの個性を特定する。従って、次数をプレイヤーのタイプとして定式化される不完備情報のベイズ・ゲームとなり、ゲームの解はベイズ-ナッシュ均衡として与えられる。ここでの研究案件は、各プレイヤーの行動がネットワーク構造にどのように依存しているのか、不完備情報のもとで行われるゲームによってネットワーク効果がどのように形成されるのかを分析することである。

不完備情報のもとでのベイズ・ゲームは以下のように記述される。各プレイヤーは共通の事前情報として次数分布 P の知識を持っている。ゲームの開始時に、各プレイヤーは彼のタイプを識別するネットワーク上の私的情報を入手する。彼はこの情報を用いてネットワークに関する事前情報を改訂し、事後情報を形成する。この事後情報をもとに、各プレイヤーは可能な戦略集合の中から期待効用を最大化する最適戦略を選ぶ。

このゲームの均衡を分析することから、以下の 2 つの結果が得られる。第一に、ゲームが戦略的補完性を持つならば、均衡戦略は次数の増加関数となる。ゲームが戦略的代替性を持つならば、均衡戦略は次数の減少関数となる。第二に、利得が正の外部性を持つならば、すべての均衡において、実現する（期待）利得は次数の

単調増加関数となる。利得が負の外部性を持つならば、均衡利得は次数の単調減少関数となる。これらの結論は、プレイヤーの次数と戦略、および利得との間にかなり明確な関係があることを示している。他方、前節で明確に指摘した通り、完全情報のケースでは、上記の特徴は成立っていない。例えば、戦略的代替性を持つスター型ネットワークの均衡では、中心部のプレイヤーが行為 0 を選択する均衡と行為 1 を選択する均衡が可能であり、プレイヤーの直面する次数と均衡戦略に関係性が見られない。しかし、このモデルに不完備情報が導入されると、均衡戦略は次数に依存するように変化し、中心部プレイヤーが行為 1 を選択する状態は均衡とはなり得ず、中心部のプレイヤーが行為 0 を選択する均衡のみがユニークなナッシュ均衡になる。この結果は、均衡戦略の特徴がネットワークにおける情報構造に大きく依拠することを明確に示している。以下で、この結果を厳密なモデルを用いて導出する。

3.2 不完備情報とネットワーク・ゲーム

n 人のノードからなるネットワーク (N, g) を考える。プレイヤーの集合は $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ であり、ネットワークにおける連結構造は行列 $g \in \{0, 1\}^{n \times n}$ で与えられる。ただし、$g_{ii} = 0$ とする。$N_i(g) = \{j \mid g_{ij} = 1\}$ はプレイヤー i の隣人の集合を表す。プレイヤー i の次数（隣人の数）は $d_i = |N_i|$ である。各プレイヤーの戦略集合 X は同一で、実数値区間 $[0, 1]$ のコンパクトな部分集合とする。プレイヤー i の戦略（行為）を x_i と表記する。プレイヤーの次数がタイプを特定するので、行為のプロファイルが $x = (x_1, \ldots, x_n)$ であるとき、プレイヤー i の利得関数は

$$u_{d_i}(x_i, x_{N_i(g)})$$

と表現できる。ここで、$x_{N_i(g)}$ はプレイヤー i の隣人が採用している戦略プロファイルを表現する。各プレイヤーの利得は自身の行為と隣人達の行為に依存して定まる。隣人達の隣人達の行為には依存しない。ゲームはグラフィカル・ゲームとなっている。次数が同一のプレイヤーは同じ利得を得る。戦略集合が離散的であるとき、例えば、$X = \{0, 1\}$ のときを除いて、利得関数は連続で、自身の行為の凹関数であるとする。

前節で定義したように、戦略的補完性（代替性）および外部性を定義する。すべての $d,\ x_i > x'_i$ および $x \geq x'$（以下、$x = x_{N_i},\ x' = x'_{N_i}$ とおく）に対して、

$$u_d(x_i, x) - u_d(x'_i, x) \geq u_d(x_i, x') - u_d(x'_i, x')$$

が成立つならば、利得関数は戦略的補完性を持つという。対照的に、すべての $d,\ x_i > x'_i$ および $x \geq x'$ に対して、$u_d(x_i, x) - u_d(x'_i, x) \leq u_d(x_i, x') - u_d(x'_i, x')$ が成立つならば、利得関数は戦略的代替性を持つという。また、任意の d およびすべての $x \geq x'$ に対して、

$$u_d(x_i, x) \geq u_d(x_i, x')$$

が成立つならば、利得関数は正の外部性を持つという。任意の d およびすべての $x \geq x'$ に対して、$u_d(x_i, x) \leq u_d(x_i, x')$ が成立つならば、利得関数は負の外部性を持つという。

ここで、以下の関係式が成立つと仮定する。

定義 3.2 (性質 A)
すべての組 $(x_i, x) \in X^{d+1}$ に対して、 $u_{d+1}(x_i, (x, 0)) = u_d(x_i, x)$ である。

この関係式は、行為 0 を選んでいる隣人に追加的にリンクを接続する場合、この隣人を追加する前と比較しても、利得が変化しないことを表現している。言い換えると、利得は隣人の数自体には依存せず、正の行為を選

択している隣人数に依存する。この関係は多くの経済モデルで成立するが、成立しない例も存在する。性質 A は、結論を導出することを容易にするための十分条件であっても、必要条件ではないので、以下で説明する補題等の成立のために必ずしも必須の条件ではない。

例 3.1 (性質 A を満たさない次数補完性のあるケース)
例えば、$X=\{0,1\}$ で、プレイヤー i が行為 x_i を取り、隣人の行為プロファイルが x_{N_i} で与えられる。プレイヤー i の利得は隣人達の行為の平均値に依存して

$$u_d(x_i, x_{N_i}) = x_i f(\frac{\sum_{j\in N_i} x_j}{d}) - c(x_i)$$

である。*Erdös-Rényi* のランダム・ネットワークのように、隣人の次数分布に関する確率 P が独立分布であるとする。このとき、ランダムに選んだ隣人の次数が k である確率は $kP(k)/\sum kP(k)$ となる[*7]。このモデルでは、戦略的補完性は満たされるが、上記の性質 A は成立たない。

プレイヤー i は自身の次数 d_i を観察して、隣人達の次数を推測する。情報 d_i のもとでの、隣人の次数の条件付き確率を $\mathbf{P}(\cdot \mid d_i)$ と表記する。ネットワークが配列モデルで近似できるときは、$\mathbf{P}(d \mid d_i) = P(d)d/\sum P(d)d$ となることが知られている。この特殊ケースでは、Erdös-Rényi のランダム・ネットワークと同じく、個人的情報 d_i は追加的な情報をもたらさない。ここでの定式化は一般的で、隣人達の次数分布が相関するケースも内包しているので、例えば、隣人次数の条件付き確率はプレイヤーの環境（隣人数）に依存して変化するケースも取り扱える。隣人間の次数に正の相関が存在するときは、そのような正の相関関係を前提とした条件付き確率の計算を想定すればよい。具体的な計算手法はネットワーク・モデルに依存するので、ここでは取り扱わない。

プレイヤー i の次数が d_i であるとき、隣人の次数を $\mathbf{d}_{N_i} = (d_1, d_2, \ldots, d_{d_i})$ と表記する。このとき、任意の関数 $f\ :\ \{0,1,\ldots,n-1\}^m \to R,\ m \le d_i$ に対して、条件付期待値

$$E_{P(\cdot|d_i)}[f] = \sum_{\mathbf{d}_{N_i}} \mathbf{P}(\mathbf{d}_{N_i} \mid d_i) f(d_1, \ldots, d_m)$$

を定義する。すべての $d_i' > d_i$ と任意の非減少関数 $f\ : \{0,1,\ldots,n-1\}^m \to R$ に対して、

$$E_{\mathbf{P}(\cdot|d_i')}[f] \ge E_{\mathbf{P}(\cdot|d_i)}[f]$$

が成立つならば、$\mathbf{P}$ は正の隣人関係 (positive neighbour affiliation) を持つという。反対に、

$$E_{\mathbf{P}(\cdot|d_i')}[f] \le E_{\mathbf{P}(\cdot|d_i)}[f]$$

が成立つならば、$\mathbf{P}$ は負の隣人関係 (negative neighbour affiliation) を持つという。正の隣人関係とは、次数が大きいプレイヤーほど次数の大きい隣人プレイヤーに接続しているというような、プレイヤーの次数間に正の相関関係が見られることを意味する。ランダムウオーク・モデルではプレイヤーの次数間に相関関係はないが、スケールフリー・ネットワークモデルでは正の隣人関係が成立っている。

リンク接続の密度が変化するときの効果を分析するために以下の概念を定義する。すべての d_i と任意の非減少関数 $f\ : \{0,1,\ldots,n-1\}^m \to R$ に対して、

$$E_{\mathbf{P}'(\cdot|d_i)}[f] \ge E_{\mathbf{P}(\cdot|d_i)}[f]$$

[*7] この性質の導出等については、Vega-Redondo(2007) または Newman(2010) などを参照のこと。

が成立つならば、$\mathbf{P}'$ は $\mathbf{P}$ を確率的に優越するという。

クリアーカットな結論の導出と対称的なベイズ均衡に焦点を当てるために、以下の性質が成立するとする。

定義 3.3 (性質 B)

(1) ネットワークのリンク構造の形成は匿名性を持ち、ノード数は非常に多い[*8]。

(2) 利得関数は $u_{d_i}(x_i, x_{N_i})$ と表現され、自身の戦略に関して厳密に凹関数である。

この仮定のもとでは、いかなる次数のプレイヤーも同一の意思決定問題に直面し、最適な戦略はユニークに定まる。更に、対称的なベイズ均衡が成立する。

プレイヤー i の戦略は $\sigma_i : \{0, 1, \ldots, n-1\} \ \to \ \Delta(X)$ である。ここで、$\Delta(X)$ は X の上の確率分布の集合である。$\sigma_i(d_i)$ は次数 d_i のプレイヤー i が選択した混合戦略である。すべてのプレイヤーの混合戦略のプロファイルを単に $\sigma(\cdot)$ と表記する。プレイヤー i の次数 d_i が与えられたとき、i の隣人の次数の事後確率 $\mathbf{P}(\cdot|d_i)$ から導出される $x_{N_i} \in X^{d_i}$ に関する確率分布を $\psi(x_{N_i}, \sigma, d_i)$ とする。このとき、他のプレイヤーが戦略 σ を選択し、i が x_i を選択するときの、次数 d_i のプレイヤー i の期待利得は

$$U(x_i, \sigma, d_i) = \int_{x_{N_i} \in X^{d_i}} u_{d_i}(x_i, x_{N_i}) d\psi(x_{N_i}, \sigma, d_i)$$

で与えられる。

例えば、$X = \{0, 1\}$ で、ネットワークが配列モデルであるとしよう。$\sigma(d)$ を次数 d を持つプレイヤーが最適戦略において行為 1 を選ぶ確率とする。隣人の一人が行為 1 を選ぶ確率は

$$P_\sigma = \sum_d \sigma(d) \mathbf{P}(d|d_i)$$

と計算できる。d_i のうち m 人が行為 1 を選択する確率は

$$\binom{d_i}{m} P_\sigma^m (1 - P_\sigma)^{d_i - m}$$

であるので、期待利得は

$$U(x_i, \sigma, d_i) = \sum_{m=0}^{d_i} u(x_i, x_{N_i}) \binom{d_i}{m} P_\sigma^m (1 - P_\sigma)^{d_i - m}$$

となる。

もし他のプレイヤーによって選択される戦略プロファイル σ に対して、$\sigma(d_i)$ が次数 d_i のプレイヤーが選ぶ最適反応戦略になっているならば、戦略プロファイル σ は対称的ベイズ均衡を構成する。言い換えると、任意の次数 d_i を持つすべてのプレイヤー i に対して、

$$U(x_i, \sigma, d_i) \geq U(x_i', \sigma, d_i), \ \forall x_i' \in X, \ x_i \in \mathrm{supp}(\sigma(d_i))$$

が成立つならば、σ はベイズ均衡である。

任意の $d' > d$ に対して、$\sigma(d')$ が $\sigma(d)$ に対して第一位の確率的優位性を持つならば、σ は非減少的 (non-decrasing) であるという。反対に、$\sigma(d)$ が $\sigma(d')$ を第一位に確率的に優越するならば、σ は非増加的

[*8] ネットワーク形成におけるリンク接続はランダムに行われ、次数分布は有界なサポートをを持ち、プレイヤー標識の順列のみが異なる 2 つのネットワークは同一の事前確率をもつ。このとき、同一の次数を持つプレイヤーは隣人の次数に関して同一の確率分布に直面する。

(non-increasing) であるという。期待利得が、非減少的なプロファイル σ、および、任意の $x_i > x_i',\ d_i > d_i'$ に対して、不等式

$$U(x_i, \sigma, d_i) - U(x_i', \sigma, d_i) \geq U(x_i, \sigma, d_i') - U(x_i', \sigma, d_i')$$

を満たすならば、次数補完的 (degree complementarity) をもつという。反対に、非増加的プロファイル σ、および、任意の $x_i > x_i',\ d_i > d_i'$ に対して、不等式

$$U(x_i, \sigma, d_i) - U(x_i', \sigma, d_i) \leq U(x_i, \sigma, d_i') - U(x_i', \sigma, d_i')$$

が成立するならば、次数代替性 (degree substitution) を持つという。ネットワークが戦略的補完性を持ち、正の隣人関係があり、性質 A が満たされるとき、次数補完性は成立する。性質 A は次数補完性や代替性の十分条件だが、必ずしも必要ではない。次数補完性（代替性）は戦略的補完性（代替性）よりも広い概念である。次数補完性が成立するとき、ある次数以上のプレイヤーに取って、高い水準の戦略の方が低い水準の戦略よりも魅力的である。対照的に、次数代替性が成立するとき、ある次数以上のプレイヤーに取って、低い水準の戦略の方が高い水準の戦略よりも魅力的である。

定理 3.1
性質 B が成立しているとき、対称的なベイズ均衡が存在する。もしネットワーク・ゲームが次数補完性を持つならば、次数に関して非減少的な均衡が存在する。次数代替性があるときは、非増加的な均衡が存在する。次数補完性が成立する場合は、純粋戦略の均衡が存在する。

この定理が成立することは、ゲーム理論の結果を援用すれば、容易に証明できる。戦略集合と利得関数の性質から、通常の不動点定理が適用できるので、（対称的）ナッシュ均衡の存在はほぼ自明である。対称的均衡は戦略的補完性のもとでは純粋戦略から構成されることは、Milgrom and Shannon(1994) の結論から派生する。均衡解の単調性は以下のように導出できる。他のプレイヤーが単調性をもつ戦略で反応することが知られていれば、自身も単調な戦略で反応することが最適である。単調な戦略を持つ均衡の存在は、Van Zandt and Vives(2007) によって証明されている。

定理 3.2
利得関数が性質 A および B を満たし、隣人ノードの次数が独立に形成されているとする。このとき、厳密な戦略的補完性のもとで、すべての対称的均衡は次数に対して非減少的である。厳密な戦略的代替性のもとでは、非増加的となる。

戦略的補完性が存在する場合の証明を与える。対称的均衡で次数 d を持つプレイヤーの最適戦略の集合を σ_d^* とする。一般性を失うことなく、$x' \in \mathrm{supp}(\sigma_d^*) > 0$ である x' が存在すると仮定する。さらに、$x_d = \sup$ $[\mathrm{supp}(\sigma_d^*)]$ とおく。このとき、$x_d > 0$ となっている。$x < x_d$ を満たすいかなる x に対しても、性質 A および戦略的補完性の性質から、$x_s >$ を満たす任意の x_s に関して

$$u_{d+1}(x_d, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}, x_s) - u_{d+1}(x, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}, x_s) \geq u_d(x_d, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}) - u_d(x, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d})$$

が成立つ。次数分布が隣人の間で独立であるとする仮定から、期待値を取ると、

$$U(x_d, \sigma^*, d+1) - U(x, \sigma^*, d+1) > U(x_d, \sigma^*, d) - U(x, \sigma^*, d)$$

となる（$x_d > 0$ なので）。x_d は次数 d のプレイヤーの最適戦略の一つであるから

$$U(x_d, \sigma^*, d) - U(x, \sigma^*, d) > 0$$

である。よって、$x < x_d$ に対して

$$U(x_d, \sigma^*, d+1) - U(x, \sigma^*, d+1) > 0$$

となる。このことは、$x_{d+1} \in \mathrm{supp}(\sigma^*_{d+1})$ ならば、$x_{d+1} > x_d$ であることを必要とする。定理の主張が成立する。

各プレイヤーの行動に関する以下のシナリオがこの定理を直感的に理解するための助けとなる。リンク形成が独立である仮定から、次数 d と次数 $d' = d+1$ のプレイヤーは隣人の次数分布に関して同一の事前確率を持つ。もし $d+1$ 番目の隣人が行為 0 を選択するならば、性質 A に従い、次数 d' のプレイヤーは次数 d のプレイヤーと同じ戦略を採用する。もし $d+1$ 番目の隣人が正の行為を選択するならば、厳密な戦略的補完性より、次数 d' のプレイヤーは正の行為を選択することが最適である。

ネットワークの経済学で解明されるべき最大の案件の一つは、社会的なリンク数が大きいほど、個人的に有利性な利得を獲得できるのか否かという疑問である。言い換えると、次数と利得の間に正の関係性が観察されれば、ネットワーク上における個人的有利性が次数に依存していることを含意する。正の外部性を持ち、正の隣人関係を持つゲームで、次数 $(d+1)$ のプレイヤーの行動を考えてみよう。他のすべてのプレイヤーが単調な増加的均衡戦略を採用しているととき、このプレイヤーの $d+1$ 番目の隣人が行為 0 を取っていたとする。このとき、性質 A から、次数 $(d+1)$ のプレイヤーは次数 d のプレイヤーと同一の戦略を採用することにより、少なくとも、次数 d の プレイヤーと同水準の利得を確保することが出来る。この事実は以下の結果を成立させる。

定理 3.3

利得関数は性質 A を満たすとする。

(1) もし次数に関する事後確率分布 $\mathbf{P}$ が正の隣人関係を持ち、ゲームが正の外部性を持つならば、次数に関して非減少的戦略からなる対称均衡では、期待利得は次数に関して非減少的となる。負の外部性を持つときは、期待利得は非増加的となる。

(2) もし $\mathbf{P}$ が負の隣人関係をもち、正の外部性が成立するならば、次数に関して非増加的戦略からなる対称均衡においては、期待利得は次数に関して非減少的となる。負の外部性を持つときは、期待利得は非増加的となる。

正の外部性のケースに対する証明を簡単に説明する。σ^* を均衡戦略のプロフィルとし、次数 d を持つプレイヤーの戦略を x_d とする。いま、$x_d \in \mathrm{supp}(\sigma^*_d)$、$x_{d+1} \in \mathrm{supp}(\sigma^*_{d+1})$ と仮定する。性質 A から

$$u_{d+1}(x_d, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}, 0) = u_d(x_d, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d})$$

が成立つので、正の外部性より、任意の $x > 0$ に対して

$$u_{d+1}(x_d, x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}, x) \geq u_d(x_d, x_{k_1}, \ldots, x_{k_i})$$

が満たされる。σ^* を単調増加な均衡戦略として、正の隣人関係が成立つとすれば、

$$U(x_d, \sigma^*, d+1) \geq U(x_d, \sigma^*, d)$$

が満たされる。σ^*_{d+1} が最適な戦略であるならば、

$$U(x_{d+1}, \sigma^*, d+1) \geq U(x_d, \sigma^*, d+1)$$

とならなければならない。よって、

$$U(x_{d+1}, \sigma^*, d+1) \geq U(x_d, \sigma^*, d)$$

が結果する。

正の外部性が存在する限り、戦略的補完性あるいは戦略的代替性には依存せず（単調的均衡であるという条件下で）、より多くの隣人数を持つプレイヤーほどより大きな利得を獲得できる。このネットワーク上の有利性は、戦略的代替性をもつ（例えば、ローカル公共財の）ゲームで負の隣人関係を持つ場合、非常に衝撃的な結論となる。つまり、隣人数が多いプレイヤーほど少ない努力で、より大きな利得を手に入れることができる。

本節の最後に、リンク接続の密度が上昇するとき、あるいは、リンク接続パターンが変化するとき、各プレイヤーの行動や利得にどのような影響を与えるかを考察する*9。最初に、戦略的代替性のゲームを取り上げ、次いで、戦略的補完性のゲームを分析する。ゲームのモデルを単純化して、各プレイヤーの戦略は $\{0, 1\}$ のみからなる、２項選択問題とする。性質 A を満たし、負の隣人関係を持つ２項選択ゲームを代替性の２項選択ネットワーク・ゲーム (binary network games of substitutes) と呼ぶことにする。この単純化されたモデルでの各プレイヤーの最適戦略は閾値戦略となることはほぼ自明である。

定理 3.4

代替性の２項選択ネットワーク・ゲームでは、ユニークな非増加的均衡戦略 σ において、以下のような性質を持つ閾値 $t \in \{0, 1, \ldots\}$ が存在する。つまり、プレイヤー i の次数 d_i に関して、$d_i < t$ が満たされるときプレイヤーの最適戦略は $\sigma(1|d_i) = 1$ となり、$d_i > t$ の時は $\sigma(0|d_i) = 1$ となり、$d_i = t$ の場合は $\sigma(1|t) \in (0, 1]$ となる。

上記の定理によれば、隣人の次数を増加させるようなネットワーク密度の高度化は、各プレイヤーの行為水準の低下を引き起こす。各プレイヤーの行為水準が低下し、平均的な行為水準が低下することを予想する各プレイヤーは自身の行為水準を上げるだろうか？言い換えると、閾値は低下するのだろうか。以下の定理がこれに答える*10。

定理 3.5

代替性の２項選択ネットワーク・ゲームで、隣人の次数に関する確率分布 $\mathbf{P}$ をもつネットワーク・ゲームにおける均衡戦略の閾値を t、確率分布 $\mathbf{P}'$ をもつネットワーク・ゲームにおける閾値を t' とする。このとき、$\mathbf{P}$ が $\mathbf{P}'$ を確率的に優越しているならば、それぞれのゲームにおける閾値について、$t \geq t'$ が成立つ。閾値次数 t を持つプレイヤーに関しては、$\mathbf{P}$ のもとで、隣人が行為 *1* を選択する確率がより低くなる。

隣人がより多くのノードと接続するにつれて、各プレイヤーの閾値は上昇し、各隣人が行為 1 を最適反応とする確率が低下する。

戦略的補完性を持つネットワークゲームでは、均衡戦略は次数の増加関数となる。隣人の次数が増加すれば、元の均衡戦略を採用するとき、今まで以上の利得をもたらす。以下の定理が成立する。

定理 3.6

戦略的補完性のネットワーク・ゲームにおいて、確率分布 $\mathbf{P}$ をもつときの均衡戦略を σ、確率分布 $\mathbf{P}'$ をもつときの均衡戦略を σ' とする。確率分布 $\mathbf{P}$ が確率分布 $\mathbf{P}'$ を確率的に優越するならば、すべての非減少的均衡 σ' に対して、これを確率的に優越する非減少的均衡 σ が存在する。

---

*9 ここで定式化されたモデル、不完備情報のグラフィカル・ゲームを用いて、社会的ネットワークにおける意思決定の拡散過程を分析した研究として、Jackson and Yariv(2007) がある。

*10 以下の定理の証明については、Galeotti et al.(2010) を参照のこと。

ネットワークのリンク接続密度が増大するとき、経済厚生が増加するか否かについて考察する。期待厚生の水準はランダムに選ばれたプレイヤーの期待利得によって代理される。当然、ネットワーク外部性が正であるか負であるかは重要は要因である。正の外部効果が見られ、$\mathbf{P}$ が $\mathbf{P}'$ を優越しているとすると、上の補題から、確率分布 $\mathbf{P}'$ のもとでのあらゆる均衡戦略 σ' の行為水準よりもより大きな行為水準を選択する均衡戦略 $\mathbf{P}$（確率分布 $\mathbf{P}$ のもとで）が存在する。期待利得は次数の非減少関数であるので、隣人の次数に関する事前確率分布 P と $\mathbf{P}$ の関係を分析することが重要である。$\mathbf{P}'$ に対応する事前確率を P' とする。事前確率 P が事前確率 P' を第一位に確率的に優越するならば、ランダムに選ばれたプレイヤーの期待利得は、確率分布が $\mathbf{P}'$ から $\mathbf{P}$ に変化するに伴って、増大する。以下の定理が成立する。

定理 3.7
利得が正の外部性をもつ補完性のネットワークゲームを考える。$\mathbf{P}$ が $\mathbf{P}'$ を優越し、事前確率 P が事前確率 P' を第一位に確率的に優越すると仮定する。（$\mathbf{P}'$ のもとでの）すべての均衡戦略 σ' における社会的厚生よりも高い厚生水準を与える（$\mathbf{P}$ のもとでの）均衡戦略 σ が存在する。

均衡戦略の特徴や均衡における社会的経済厚生の水準は、利得関数の戦略的な構造、および、ネットワーク・パターンのリンク構造に大きく依存している。上記の諸定理が主張している通り、戦略的代替性が見られる場合、ネットワークの連結密度が増加するにつれて、各プレイヤーの隣人が行為 1 を選択する確率は低下する。反対に、戦略的補完性が成立つ場合、リンク接続の増加は隣人が行為 1 を選択する確率を上昇させる。

以上の分析では、ネットワーク・ゲームをグラフィカル・ゲームとして定式化し、性質 A もしくは次数補完性または次数代替性を満たす（閾値）モデルにおいて、プレイヤーの持つ情報構造に単純な情報の不完備性を導入した。各プレイヤーは自身の隣人数についてはよく知っているが、隣人の行動や隣人の友達の数や彼らの行動については無知であると仮定してきた。こうした想定が現実的であるか否かについては議論の余地がある。また、ネットワーク構造の特徴を次数分布という指標によって表現してきた。群集化度や中心化度などネットワーク理論での主要概念と均衡戦略との関係については、モデル内で定式化する必要があるが、未だ未解決の案件となっている。性質 A を満たさないネットワーク・ゲームあるいは 2 次線形利得を持つネットワーク・ゲームへの不完備情報構造を明示的に導入するモデルの構築に関しては未開拓の領域となっている。

4　ネットワーク形成のゲーム

4.1　一方向的リンク形成のゲーム

既に議論してきた通り、ネットワーク構造のあり方はネットワーク上の各個人の行為と利得ならびに社会的な経済厚生に極めて大きな影響を及ぼす。各個人の経済厚生は彼を取り巻くネットワーク環境に大きく左右される。ある二人の個人の間に形成されたリンクの存在は直接的にリンクされている当該個人のみならず、間接的に到達可能な諸集団との間にも外部効果が働く。各個人のリンク形成の問題を理解するためには、互いに直接的にリンクされたプレイヤーの間の戦略的な相互依存関係をモデル化するだけでは不十分である。この意味で、各プレイヤーのリンク形成に関する意思決定は、極めて複雑な戦略的な様相を有する。戦略的なネットワーク形成理論を進めるためには、リンク接続によって生じるネットワーク上で働く外部効果を明示的に導入した各プレイヤーの利得関数を特定する必要がある。戦略的リンク形成問題の分析を、各プレイヤーの経済合理的な誘因からではなく、大きな社会的グループの間における誘因、協調や合意形成をモデル化することから始めることは、ネットワーク形成の理論を進める方法としては理にかなっていない。ネットワークは非常に複雑な生き物で、こうしたモデルからクリアーカットな結論を導出することは非現実的である。従って、戦略的

ネットワーク形成の理論として様々な理論が想定できるとしても、少なくとも共通の前提として、各プレイヤーのリンク形成の誘因を出発点として理論を組み立てる必要がある。

個別の個人としての動機からであれ、グループの一員としての動機からであれ、各プレイヤーが新しいリンクを形成したり、既存リンクを削除することによりネットワーク構造を変更させる誘因を持たない時、ネットワークは戦略的に安定している、あるいは、均衡状態にあると言える。戦略的に安定なネットワーク、あるいは、ネットワーク・リンクの均衡がいかなる社会的性質を持つのか、いかにして到達されるのか、そして、それらが存在するのか否かを考察する必要がある。Myerson(1991) が提案したように、ゲーム理論の枠組内でモデル化することも出来る。また、提携形ゲーム理論のように、リンク形成を提携の形成と理解してモデル化することも出来る。しかし、こうした通常のゲーム理論には収まりきれない重要な側面が存在する。提携ゲームでは、各プレイヤーは一つの提携にのみ所属が可能であると暗黙に前提とされているが、ネットワーク形成では、各プレイヤーは一つのグループのみならず、複数のグループに属することが出来る。例えば、複数のスター型サブネットワークが連結されているようなリンク形成は提携ゲームでは許されない。

伝統的なグラフ理論でも、ネットワーク形成の理論は、Erdös and Nényi によるランダム・ネットワーク・モデルを始めとして、配列モデル、スモールワールド・モデルやスケールフリー・モデルなど多彩な理論が提案されてきた[*11]。しかし、経済学で必要とされる理論は、リンク形成の意思決定を各プレイヤーの経済的誘因に基づいて説明する必要があり、各プレイヤーの自発的な意志によってどのようにしてネットワークが形成されるかを理解する視点が重要である。各個人の意思決定を理解するために、各個人の選好関係、保有する知識および個人合理性を明示的に考慮しなければならない。

２種類のリンク接続の手続きが考えられる。一つは、リンク元のプレイヤーがリンク先を選んでリンク形成する方法である。(これを一方向リンク、one-sided links と呼ぶ)。このリンク形成はインターネットにおける WWW ネットワークの形成に典型的に見られる。この場合は、リンク接続の維持費用はリンク接続を希望するリンク元のプレイヤーが支払う。外部効果としての便益をリンク元だけが受け取るケース (one-way flow) と、リンク元とリンク先の両者が受け取るケース (two-way flow) があり得る。２つ目に、リンク形成はリンク元とリンク先の両者が合意して初めて可能になる場合がある。双方向リンク形成のケース (two-sided links) となる。このリンク形成は多くの社会的経済的ネットワークに見られるリンク形成の方法である。例えば、友人関係、共著・共同研究関係、企業間の業務提携や共同開発、取引における売手-買手のネットワーク、多国間の自由貿易ネットワークなどに見られる。必ずしも、社会的経済的ネットワークに見られるリンク形成がすべて双方向的という訳でもなく、輸送・配送のネットワークや組織内ネットワークに見られるようにリンク形成に非対称性が付随する場合には、一方向リンク形成のモデルが有用である[*12]。

一方向リンク形成のモデルはネットワーク上で各個人間に情報がいかにして流れるのかを分析する枠組みとして有用である。ここでの外部効果は情報の入手と理解すると分かり易い。一方向リンク形成のモデルを説明する。ネットワークに n 個のノード (プレイヤー) があるので、プレイヤーの集合は $N=\{1,2,\ldots,n\}$, $n\geq 3$ である。各プレイヤー i はネットワーク上のプレイヤーの部分集合に一方的にリンク接続することができる。このプレイヤーの利得は自身が形成したリンクパターンのみならず、それら隣人のリンクパターンにも依存する。各プレイヤー i の戦略を $g_i=(g_{i1},g_{i2},\ldots,g_{i,i-1},g_{i,i+1},\ldots,g_{in})$ と表記する。$g_{ij}\in\{0,1\}$, $j\in N-\{i\}$

[*11] Jackson and Rogers(2007) は、選好に依存したリンク接続 (preferencial attachment) のモデルを用いて、現実の社会的ネットワークで観察される重要な特徴を説明しようと試みている。

[*12] 一方向リンク形成ゲームの代表的なモデルは Bala and Goyal(2000)、Goyal and Vega-Redondo(2005)、Galeotti er al.(2006)、Feri(2007)、Kim and Wong(2007)、Hojman and Szeidl(2008) などで分析されている。双方向リンク形成ゲームの代表的なモデルは、Jackson and Wolinsky(1996)、Dutta and Mutuswami(1997)、Watts(2001)、Jackson and Watts(2002a,b)、Jackson and Nouweland(2005) などで研究されている。

である。$g_{ij}=1$ であれば、プレイヤー i からプレイヤー j に一方向でリンク接続している。プレイヤー i の戦略集合は $\mathcal{G}_i=\{0,1\}^{n-1}$ である。 すべてのプレイヤーの戦略プロファイルは $g=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ であり、戦略プロファイルの集合は $\mathcal{G}=\Pi_{i=1}^{n}\mathcal{G}_i$ である。方向付けられたネットワークの集合を $\mathcal{G}=\{g\}$ と表記する。

ネットワーク g において、プレイヤー i がリンク形成したリンク先（隣人）の集合を $N_i(g)=\{j\in N\mid g_{ij}=1\}$ と表記し、隣人の数を $d_i=|N_i(g)|$ と表現する。プレイヤー i は隣人達 N_i が保有する情報を入手できる、あるいは、彼らの行為から外部効果を受けると想定する。同様に、プレイヤー i にリンク接続をしているプレイヤーの集合を $N_{-i}(g)=\{j\in N|g_{ji}=1\}$ とし、その数を $d_{-i}=|N_{-i}(g)|$ と表現する。d_i はプレイヤー i の出次数 (out-degree)、d_{-i} は入次数 (in-degree) と言う。プレイヤー i がネットワーク上で到達可能なノードの集合を $N_i^r(g)=\{k\mid i\xrightarrow{g}k\}$ と表記する。従って、プレイヤー i がネットワーク上で到達可能なプレイヤーの（ノード）数は $n_i(g)=|N_i^r(g)|+1$ である。ただし、プレイヤー i から到達可能なノード数の中には自分自身も含める。到達可能集合の概念を導入した理由は、プレイヤー i から到達可能なすべてのプレイヤーの情報がプレイヤー i に利用可能であること、つまり、リンク形成によるネットワーク効果を表現したいからである。

一方向のネットワーク効果だけが存在するケースでの各プレイヤーの利得関数を定式化する。利得関数 $u_i:\mathcal{G}\to R$ を

$$u_i(g)=\psi(n_i(g),d_i(g)) \tag{6}$$

と定義する。ここで、$\psi(x,y)$ は x に関して厳密に増加関数で、y に関して厳密に減少関数となっているような写像 $\psi:Z_+\times Z_+\to R$ である。ここで、Z_+ は非負の整数の集合である。$n_i(g)$ はプレイヤー i が形成したリンク・パターンから獲得する便益の大きさを代理表現している。$d_i(g)$ はリンク接続を維持するために必要な費用の大きさを表現する。例えば、利得関数が

$$u_i(g)=n_i(g)-d_i(g)c$$

のように定義されるとする。ここで、$c>0$ はリンク維持のための費用を表す。各プレイヤーの利得は、プレイヤーが入手できるプレイヤーの数からリンク接続費用を引いた大きさに比例する。もし $0<c<1$ ならば、他のプレイヤー j の情報を入手するために、j に喜んでリンク接続する動機が存在する。もし $1<c<n-1$ ならば、j が他の複数のプレイヤーとリンクを形成していなければ、j とのリンク形成をする誘因が働かない。インターネット上での WWW 間のリンク形成の経済動機はこうした一方向のネットワーク効果が働くケースである。

次に、リンクの双方向で外部効果が獲得できるケースを定式化する。$g_{ij}=1$ である時、$g_{ji}=0$ であっても、プレイヤー i の行為はプレイヤー j に対して外部効果をもたらす。ネットワーク効果の観点から見ると、あたかも $g_{ji}=1$ であるかのように見える。つまり、リンク接続は方向付けられていないといえる。ネットワーク g から方向付けられていないネットワーク $\bar{g}$ を作成する。$\bar{g}_{ij}=\max\{g_{ij},g_{ji}\},\ i,j\in N$ とする。この時、利得関数は

$$\bar{u}_i(g)=\psi(n_i(\bar{g}),d_i(g))$$

と表現される。ここで、$n_i(\bar{g})=|N_i^r(\bar{g})|$ である。利得関数が線形関数 $\psi(x,y)=x-yc$ で表現できる時、利得は

$$\bar{u}_i(g)=n_i(\bar{g})-d_i(g)c$$

となる。

ネットワーク $g \in \mathcal{G}$ を与える時、プレイヤー i が維持しているリンクをすべてネットワークから削除して得られる部分ネットワークを g_i とする。ネットワーク g は $g = g_i + g_{-i}$ と表現できる。ここで、$+$ はネットワーク・リンクの和を意味する。プレイヤー i の戦略 g_i が、すべての $g'_i \in \mathcal{G}_i$ に対して、

$$u_i(g_i + g_{-i}) \geq u_i(g'_i + g_{-i}) \tag{7}$$

を満たすならば、g_i は g_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応であるという。プレイヤー i の g_{-i} に対する最適反応の集合を $BR_i(g_{-i})$ と表記する。

定義 4.1 (ナッシュ均衡ネットワーク)
すべてのプレイヤーが他のプレイヤーの戦略に対して最適な反応をしているならば、つまり、任意のプレイヤー i に対して、$g_i \in BR_i(g_{-i})$ となっているならば、ネットワーク $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ はナッシュ均衡のネットワークであるという。不等式 (7) のうち一つの不等式が等式を含まなければ、厳密なナッシュ均衡のネットワークという。双方向での外部効果が存在するケースでは、利得関数を $\bar{u}_i(g)$ と修正すれば良い。

ネットワークの社会的厚生を $W(g) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g)$ と定義すると、関数 W は $\mathcal{G}$ から R への写像である。もしすべての $g' \in \mathcal{G}$ に対して $W(g) \geq W(g')$ が成立するならば、ネットワーク g は社会的に効率的であるという。双方向外部効果が存在する時は、$\bar{W}(g) = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i(g)$ と定義を修正すれば良い。利得が線形関数であるときは、すべてのリンク数からリンク接続費用を控除した残高を最大化するネットワークが効率的なネットワークとなる。

方向付けられたリンクを持つネットワーク g が与えられているとき、部分ネットワークのノードの集合 $C \subset N$ が以下の条件を満たすならば、C を g のコンポーネントという。すなわち、C に属する異なるノード i と j に対して、$i \xrightarrow{g} j (j \in N_i^r(G))$ が成立し、かつ、任意の $i, j \in C'$ に対して $i \xrightarrow{g} j$ を満たし、C を厳密な部分集合として含む集合 C' が存在しないならば、g のコンポーネントと呼ばれる。言い換えると、コンポーネントは元のネットワークの部分ネットワークで、その中のすべてのノードの間を連結する経路が存在する最大の部分集合である。コンポーネント C に含まれる 2 つのノード i と j の間のリンクを削除するとき、C がコンポーネントではなくなるならば（2 つのコンポーネントに分解されてしまうならば)、C は最小 (minimal) のコンポーネントであるという。

通常、ネットワークは複数のコンポーネントをもつ。ネットワークがただ一つのコンポーネントしか持たない場合、ネットワークは連結している (connected) という。この一つのコンポーネントが最小となっているとき、最小に連結していると言う。各ノード i から他のノードへのパス（経路）が存在しないようなネットワークは空である (empty) と言う。$N_i(g) = N - \{i\}, \ \forall i \in N$ となっているネットワークは完備なネットワーク (complete network) という。$g_{i_1,i_2} = g_{i_2,i_3} = \cdots = g_{i_{n-1},i_n} = g_{i_n,i_1} = 1$ を満たすようにノード $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ が配置されているネットワークを円型、輪型 (wheel) ネットワークという。$g_{ij} = g_{ji} = 1, \ \forall j \in N - \{i\}$ を満たす中心ノード i を持つネットワークはスター型ネットワークという。

以下の定理が成立つ[*13]。

定理 4.1
利得関数が (6) で与えられるとする。ナッシュ均衡ネットワークは空のネットワークまたは最小に連結したネットワークのいずれかとなる。

[*13] 以下の定理の証明については、Bala and Goyal(2000) を参照のこと。

この定理の成立を直観的に理解することは以下のような思考実験を行えば容易に可能である。空でないナッシュ均衡ネットワークを考えよう。最多の到達可能なノード数を持つをプレイヤーを i とし、i はすべてのノードに到達できないとする。このとき、i から到達できず、i に到達する経路を持たない別のプレイヤー j が存在しなければならない。j が i に到達可能だとすると、j は i より多いノードに到達できるので、最初の仮定に矛盾する。j がナッシュ戦略から逸脱して、ノード i だけにリンク接続を行うと、i よりも多数のノード数に到達可能となり、利得が上昇する。これは i が最大のノード数に到達可能な経路を持っている仮定と矛盾する。言い換えると、i の最適な反応はすべてのノードに到達可能なようにリンクを接続することである。i 以外のプレイヤーは i と直接的にリンク接続を行うか、または、i に到達可能なようにリンク形成を行う動機を持つ。こうして、ネットワークは連結されなければならない。最小に連結されていなければ、あるプレイヤーが連結性を維持しながらリンクを削除することができる。

定理 4.2
利得関数が (6) で与えられるとする。厳密なナッシュ均衡ネットワークは円型ネットワークまたは空なネットワークである。
(a) ある $\hat{x} \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して、$\psi(\hat{x}+1, \hat{x}) > \psi(1, 0)$ が成立つならば、円型ネットワークがユニークな厳密なナッシュ均衡ネットワークとなる。
(b) すべての $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して、$\psi(x+1, x) < \psi(1, 0)$、かつ、$\psi(n, 1) > \psi(1, 0)$ が成立つならば、空のネットワークと円型ネットワークは共に厳密なナッシュ均衡ネットワークである。
(c) もしすべての $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して、$\psi(x+1, x) < \psi(1, 0)$、かつ、$\psi(n, 1) < \psi(1, 0)$ が成立つならば、空なネットワークがユニークな厳密なナッシュ均衡ネットワークである。

$\psi(1, 0)$ はリンク接続の無いプレイヤーの利得であり、$\psi(x+1, x)$ は x 個のノードにリンク接続しているときに x 個のノードから外部効果を受け取る場合の利得である。(a) の条件式 $\psi(\hat{x}+1, \hat{x}) > \psi(1, 0)$ は、1 個以上のノードにリンク接続したときの利得の方が孤独でいるときよりも大きいことを意味する。この場合、円型ネットワークがナッシュ均衡になることは容易に理解できる。$\psi(n, 1)$ は、一つのノードにリンク接続すると、すべてのノードからの外部効果を受け取れる場合の利得、例えば、円型ネットワークにおける利得である。

利得関数が線形であるとき、$0 < c \leq 1$ ならば、定理の (a) が該当する。よって、厳密なナッシュ均衡ネットワークは円型ネットワークになる。$1 < c < n-1$ のとき、定理の (b) が適用される。また、$c > n-1$ のとき、定理の (c) が該当する。この定理の含意を理解すれば、以下の定理が派生することはほぼ自明である。

定理 4.3
利得関数が (6) で与えられるとする。
(a) もし $\psi(n, 1) > \psi(1, 0)$ ならば、円型ネットワークがユニークかつ効率的なネットワークである。
(b) もし $\psi(n, 1) < \psi(1, 0)$ ならば、空なネットワークがユニークかつ効率的なネットワークである。

次に、リンク形成は一方向で行われるが、外部効果はこのリンクの双方向に働くケースを考える。この双方向外部効果のモデルで、上記の諸定理がどのように修正されるかを考える。対応する現実のネットワークとしては Web ページ間のネットワークや論文の引用ネットワーク想定している。表記法について再度確認しておく。$\bar{g}_{ij} = \max\{g_{ij}, g_{ji}\}$, $i, j \in N$ とする。ネットワーク g において、プレイヤー i がリンク形成したリンク先（隣人）の集合を $N_i(g) = \{j \in N \mid g_{ij} = 1\}$ と表記し、隣人の数を $d_i = |N_i(g)|$ と表現する。同様に、プレイヤー i にリンク接続をしているプレイヤーの集合を $N_{-i}(g) = \{j \in N | g_{ji} = 1\}$ とし、その数を $d_{-i} = |N_{-i}(g)|$ と表現する。プレイヤー i がネットワーク上で到達可能な（情報源として利用可能な）ノード

の集合を $N_i^r(\bar{g}) = \{k \mid i \xrightarrow{\bar{g}} k\}$ と表記する。従って、プレイヤー i がネットワーク上で到達可能な（情報源として利用可能な）プレイヤーの（ノード）数は（自身を含めて）$n_i(\bar{g}) = |N_i^r(\bar{g})| + 1$ である。$n_i(\bar{g})$ はプレイヤー i が入手可能な情報源の数に対応する。この時、利得関数は

$$\bar{u}_i(g) = \psi(n_i(\bar{g}), d_i(g)) \tag{8}$$

と定義される。$\psi(x, y)$ は x に関して厳密な増加関数、y に関して厳密な減少関数であると仮定する。

方向付けられたネットワークで成立する主要な定理は引き続き維持される。上記の第一の定理「ナッシュ均衡ネットワークが空のネットワークまたは最小に連結したネットワークのいずれかとなる。」の成立は、上記定理の証明過程からほぼ自明である。最小に連結されたネットワークの代表として、線上のネットワークやスター型ネットワーク、および、スター型が一つのリンクで２つ以上連結されたネットワークを上げることができる。スター型ネットワークでは、中心部のノードが周辺部のすべてのノードへの連結費用を拠出するケースがあり、これを中心部費用負担のスター型 (ceter-sponsored star) という。周辺部のノードが中心ノードへのリンク接続費用をすべて支払うケースを周辺部費用負担のスター型ネットワーク (periphery-sponsored star) という。

定理 4.4
利得関数が (8) で与えられるとする。厳密なナッシュ均衡ネットワークは空のネットワークまたは中心部費用負担のスター型ネットワークのいずれかとなる。
(a) すべての $x \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ に対して、$\psi(n, n-1) > \psi(x+1, x)$ が成立つ時にのみ、中心部費用負担のスター型ネットワークが厳密なナッシュ均衡ネットワークとなる。
(b) すべての $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して、$\psi(1, 0) > \psi(x+1, x)$ が成立つ時にのみ、空のネットワークが厳密なナッシュ均衡ネットワークである。

$\psi(n, n-1)$ は、$n-1$ 個のノードにリンク接続して、$n-1$ 個のノードから外部効果をを得るとき、つまり、円型ネットワークであるときに得られる利得である。直観的な証明を与える。g が空でない厳密なナッシュ均衡ネットワークであるとする。２つの異なるノード i と j に関して、$g_{ij} = 1$ であると仮定する。このとき、$\bar{g}_{j,j'} = 0,\ j' \notin \{i, j\}$ でなければならない。もしそうでないとする。すると、i は j へのリンクを削除して j' へのリンクを作成しても、前と同じ利得が保証される。これは厳密なナッシュ均衡ネットワークであることと矛盾する。よって、j は i 以外とリンク接続していない。i が直接的にリンク接続しているいかなるノードもこれ以外のリンク接続を持たない。g が最小連結のネットワークなので、i はスター型の中心ノードでなければならない。

利得関数が線形であるとき、この定理から、$0 < c < 1$ のとき、(a) の条件が成立つので、ユニークな厳密なナッシュ均衡ネットワークは中心部費用負担のスター型ネットワークになる。$c > 1$ のとき、ナッシュ・ネットワークは空なネットワークになる。

定理 4.5
利得関数が (8) で与えられるとする。効率的ネットワークは最小連結である。すべての $y \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ と $x \in \{y+1, \ldots, n-1\}$ に対して、$\psi(x+1, y+1) > \psi(x, y)$ が成立つならば、効率的ネットワークは連結したネットワークとなる。

この定理の証明は単純である。各ノードの利得は到達可能なノード数に依存するが、その距離には依存しないので、最小のリンク数でネットワークを形成することが効率的になる。リンク接続を追加するごとに利得が

増加するならば、すべてのノードが連結されるとき利得は最大になる。定理の条件が満たされるか否かに応じて、効率的なネットワークは、連結されているネットワークあるいは空のネットワークになる。

利得関数が線形であるとき、直接的な計算から、$c < n$ ならば最小に連結したネットワークが効率的であり、$c > n$ ならば空のネットワークが効率的となる。さらに、$0 < c < 1$ ならば、スター型ネットワークが均衡ネットワークでありかつ効率的ネットワークとなる。$1 < c$ ならば、空のネットワークが均衡ネットワークとなり、効率的ネットワークに比べてリンク接続が過少となる。

ここで、ナッシュ均衡ネットワークの安定性について考える。初期状態が非ナッシュ・ネットワークであるとき、時間の経過と共に、均衡状態ではどのような状態に収束するのだろうか。ナッシュ均衡のうち、どのようなネットワークが動的に安定した均衡となっているのかに答える必要がある。すべてのプレイヤーが最適反応 $g_i \in BR_i(g_{-i})$ でライバルの戦略に反応すると仮定する。このとき、双方性外部効果を持つネットワーク・ゲームでは、以下の定理が成立する。

定理 4.6

利得関数が (8) で与えられるとする。

(a) すべての $y \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ と $x \in \{y+1, \ldots, n-1\}$ に対して、$\psi(x+1, y+1) > \psi(x, y)$ が成立つならば、各プレイヤーの動的な反応の結果、ネットワークのリンク状態は中心部費用負担のスター型ネットワークに確率 *1* で収束する。

(b) すべての $y \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ と $x \in \{y+1, \ldots, n-1\}$ に対して、$\psi(x+1, y+1) < \psi(x, y)$ が成立つならば、動的な過程は確率 *1* で空のネットワークに収束する。

ここまでの結論は、各プレイヤーの利得が入手可能な情報源の数（到達可能なノード数）のみに依存して、情報源への距離には依存しないと仮定したことから導出されている。もし情報源が遠方にあるほど、その信頼性が低下する、あるいは、情報の価値が小さくなるならば、今までの定理はどのように修正されるのだろうか。この問題に応えるために、利得関数を

$$u_i(g) = 1 + \sum_{j \in N_i^r(g)} \delta^{l_{ij}(g)} - d_i(g)c \tag{9}$$

のように定義することができる。ただし、$l_{ij}(g)$ は i と j を結ぶ経路の最短距離 (geodesic distance) を表現する。一般性を失うことなく、$\delta < 1$ と仮定する。これは、Jackson and Wolinsky(1996) の連結モデルと同種のモデルであるが、リンク形成が一方的になされている想定で異なっている。

リンク形成が一方向で行われ、リンクからの便益も方向付けられているケースを考えてみよう。このとき、リンク形成の費用と、間接的リンク接続から直接的リンク接続への変更経路から得られる便益の増分との間のトレードオフが、ネットワーク構造を理解する上で中心的な役割を果たす。もし $c < \delta - \delta^2$ が成立つならば、間接的なリンクの代わりに直接的にリンクを接続することから得られる利得の増加分はリンク接続の費用を上回る。よって、直接的なリンク接続をすることが各プレイヤーの支配的な戦略となる。完備なネットワークが（厳密な）ナッシュ均衡となる。次に、$\delta - \delta^2 < c < \delta$ であるケースを考える。$c < \delta$ なので、各プレイヤーは誰かとリンク接続をする誘因を持つ。また、$\delta - c < \delta^2$ なので、あるプレイヤー j がネットワーク上の他のプレイヤー $k, l, \ldots$ とリンク接続しているならば、残りのプレイヤー i は、プレイヤー $k, l, \ldots$ に直接的にリンク接続する代わりに、プレイヤー j にリンク接続をすることを選ぶ。だから、スター型ネットワークが（厳密な）ナッシュ均衡となる。$c > \delta$ ならば、リンク接続することの費用はリンク接続からの便益を上回るので、空のネットワークがナッシュ均衡となる。従って、以下の定理が成立つ。

定理 4.7
利得関数が (9) で与えられるとする。このとき、厳密なナッシュ均衡ネットワークは連結されているか、空である。*(a)* もし $0 < c < \delta - \delta^2$ ならば、完備ネットワークが厳密なナッシュ均衡である。*(b)* もし $\delta - \delta^2 < c < \delta$ ならば、スター型ネットワークが厳密なナッシュ均衡である。*(c)* もし $c \in (0, n-1)$ ならば、円形ネットワークが厳密なナッシュ均衡になるような δ が存在する。*(d)* もし $c > \delta$ ならば、空のネットワークが厳密なナッシュ均衡である。

リンク形成が一方向で行われるが、リンクからの便益は双方向であるケースを考えてみよう。この場合、利得関数は

$$\bar{u}_i(g) = 1 + \sum_{j \in N_i^r(\bar{g})} \delta^{l_{ij}(\bar{g})} - d_i(g)c \tag{10}$$

のように定義することができる。ただし、$l_{ij}(\bar{g})$ は i と j を結ぶ経路（双方経路を含めて）の最短距離を表現する。以下の定理が成立つ。

定理 4.8
利得関数が (10) で与えられるとする。このとき、厳密なナッシュ・ネットワークは連結されているか、空である。*(a)* もし $0 < c < \delta - \delta^2$ ならば、完備ネットワークがユニークに厳密なナッシュ均衡である。*(b)* もし $\delta - \delta^2 < c < \delta$ ならば、スター型ネットワークが厳密なナッシュ均衡である。*(c)* もし $\delta < c < \delta + (n-2)\delta^2$ ならば、周縁部費用負担のスター形ネットワークが厳密なナッシュ均衡になる。*(d)* もし $c > \delta$ ならば、空のネットワークが厳密なナッシュ均衡である。

ネットワークの効率性については、以下の定理が成立する。

定理 4.9
利得関数が (10) で与えられるとする。このとき、*(a)* もし $0 < c < 2(\delta - \delta^2)$ ならば、効率的ネットワークは完備ネットワークである。*(b)* もし $2(\delta - \delta^2) < c < 2\delta$ ならば、効率的ネットワークはスター型ネットワークである。*(c)* もし $\delta < c < \delta + (n-2)\delta^2$ ならば、周縁部費用負担のスター形ネットワークが厳密なナッシュ均衡になる。*(d)* もし $c > 2\delta + (n-2)\delta^2$ ならば、効率的ネットワークは空のネットワークである[*14]。

以上のナッシュ均衡と効率的ネットワークに関する定理の証明については、Bala and Goyal(2000) を参照のこと。プレイヤーのリンク接続費用に非対称性が見られるケースへの拡張については、Galeotti et al (2006) を参照のこと。Feri(2007) の研究により、ナッシュ均衡の安定性については、以下の結論が知られている。利得関数が (10) で与えられるとき、

1. もし $c < \delta - \delta^2$ ならば、確率的に安定なネットワークは完備ネットワークである。
2. もし $\delta - \delta^2 < c < \delta$ ならば、非常に大きい n に対して、確率的に安定なネットワークはスター型ネットワークである。
3. もし $c > \delta$ ならば、確率的に安定なネットワークが周縁部費用負担のスター型ネットワークまたは空のネットワークになるような $\hat{c}$, $\delta < c < \hat{c}$ が存在する。ただし、$c > \hat{c}$ に対しては、確率的に安定なネットワークは空なネットワークのみである。

[*14] リンク形成が双方合意の上で実現するケースにおける結果は Jackson and Wolinsky(1996) により導出されている。効率的になるネットワーク構造は同じとなるが、そのときに対応するパラメター値の範囲が異なる。次節を参照のこと。

以上の結果は、ナッシュ均衡のネットワーク・アーキテクチャーが複数存在し、ユニークには定まらないこと、リンク接続費用が幾つかの閾値を超えるごとに、ナッシュ・ネットワークの構造とリンクパターンが劇的に変化することを示している。特に、スター型ネットワークがネットワーク・パターンで重要な位置を占めていることが明らかである。そして、便益の外部効果が到達経路の長さに依存するようになると、周縁部費用負担のスター型ネットワーク構造が均衡状態として登場することが分かる[*15]。利得関数が非常に単純化されたこの段階でのモデルにおいても、結論は相当に複雑となっている。いずれにせよ、利得関数が一般的なケースでの分析はより複雑になることが予想されるが、未開拓の分野になっている。

また、リンク形成ゲームで各プレイヤーはネットワーク上のすべてのプレイヤーに関する知識を保有していることが暗黙の仮定として想定されている。現実のネットワーク形成では、ネットワークのノード数が大きくなるにつれて、この情報完備の仮定は成立っていない。情報の不完全性を明示的に定式化するとき、効率的なネットワークおよびナッシュ均衡のネットワーク・アーキテクチャー、および均衡の安定性に関する研究は残された課題となっている。

4.2 双方向リンク形成とネットワークの安定性

双方向リンク形成のゲームは基本的に協力ゲームの性質を持つ。ここでは、最初に、Myerson(1991) によって提案されたアナウンスゲームをリンク形成ゲームに適用する。各プレイヤー i は希望するリンク接続の計画をアナウンスし、この計画したリンク接続の提案が相手方に受け入れられるときに、リンク形成が実現する。プレイヤー i のリンク形成計画の戦略を $s_{ij} \in \{0,1\},\ j \in N - \{i\}$ とする。プレイヤー i の戦略プロファイルは $s_i = \{s_{ij}\}_{j \in N-\{i\}} \in X_i$ となる。すべてのプレイヤーの戦略プロファイルは $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ である。戦略プロファイルの集合は $X = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ である。$s_{ij} = s_{ji} = 1$ のときにのみ、プレイヤー i と j の間にリンクが接続されるので、ノード i とノード j の間のリンク接続は $g_{ij} = \min\{s_{ij}, s_{ji}\}$ である。すべての戦略プロファイル $s = (s_1, \ldots, s_n)$ は双方向（方向付けられていない）リンク接続のネットワーク $g(s)$ を生み出す[*16]。

こうして形成されたネットワーク g において、プレイヤー i がリンク接続した隣人の集合を $N_i(g) = \{j \in N \mid g_{ij} = 1\}$ と表記し、隣人の数を $d_i = |N_i(g)|$ と表現する。プレイヤー i がネットワーク上で到達可能なノードの集合を $N_i^r(g) = \{k \mid i \xrightarrow{g} k\}$ と表記する。$ij \in g$ と表現するとき、ネットワーク g においてノード i とノード j の間にリンクが存在することを意味する。表記 $g + ij$ でネットワーク g に新しいリンク ij を追加して出来たネットワークを表現し、$g - ij$ でネットワーク g からにリンク ij を削除してできるネットワークを表現する。

ネットワークの価値 v は関数 $v : \mathcal{G} \to \mathcal{R}$ によって表現する。ネットワークの価値は各プレイヤーの効用値のみならず、すべてのネットワーク効果を含む。ネットワーク全体の資源を用いて生産できる価値の大きさを表す。そのような価値関数の集合を $\mathcal{V}$ とする。ある特殊ケースでは、例えば、価値関数が各プレイヤーの利得（効用）u_i の総計で表現できるとき、$v(g) = \sum_{i \in N} u_i(g)$ と表現できる。

すべてのネットワーク $g' \in \mathcal{G}$ に対して、不等式 $v(g) \geq v(g')$ が成立するならば、ネットワーク g は効率的であるという。ネットワーク g の生み出す価値を各プレイヤーにどのように再配分するかを表現する配分規則 Y を以下のように定義する。配分規則は関数 $Y : \mathcal{G} \times \mathcal{V} \to \mathcal{R}^n$ として表現する。$Y_i(g, v)$ はネットワーク g 上

[*15] Hojman and Szeidl(2008) は、利得関数にある条件を課す場合、周縁部費用負担のスター型ネットワークがユニークなナッシュ均衡になることを示している。

[*16] プレイヤー i がリンク形成の戦略を選択するとき、事後的あるいは事前的にネットワーク上のすべてのプレイヤーの戦略を知っていると想定されている。完備情報の仮定が暗黙に想定されている。

でプレイヤー i に配分された利得である。交易が行われるネットワークや生産が行われているネットワークでは、交渉の結果、あるいは決められた社会的分配律に従って、生み出された総価値を各プレイヤーに割当てる規則を表す。$v(g)=\sum_{i\in N}Y_i(g,v)$ が成立する。

リンク・アナウンスメントのゲームの結果、各プレイヤーの利得 u_i はネットワーク g の関数 $u_i(g)=Y_i(g,v)$ となる。各プレイヤーが純粋戦略からなるナッシュ均衡戦略のプロファイル s^* を選択しているとき形成されるネットワーク $g(s^*)$ がネットワークのナッシュ均衡となる。今までの議論から容易に推測できる通り、通常、ネットワークのナッシュ均衡は複数存在する。ここで、この複数個のナッシュ均衡のうち、リンク形成の動的な過程において、安定した均衡は存在するのか、存在するならば、どのような特徴の均衡が安定したナッシュ均衡であるかという問題に直面する。ゲームは協力ゲームの様相を帯びているので、提携ゲームにおける安定した提携の存在問題と類似の案件を解決する必要がある。

定義 4.2 (対安定性)
以下の条件が成立するとき、ネットワーク g は価値関数 v のもとで対安定 *(pairwise stable)* であるという[*17]。

1. すべての $ij\in g$ に対して、$Y_i(g,v)\geq Y_i(g-ij,v)$, $Y_j(g,v)\geq Y_j(g-ij,v)$ である。
2. すべての $ij\notin g$ に対して、$Y_i(g,v)<Y_i(g+ij,v)$ ならば, $Y_j(g,v)>Y_j(g+ij,v)$ である。

２つのネットワーク g と g' が、ある $ij\notin g$ に対して $g'=g+ij$、あるいは、ある $ij\in g$ に対して $g'=g-ij$ であるならば、g と g' は隣接している *(adjacent)* という。もし２つの隣接しているネットワーク g と g' に関して、
(1) $g'=g-ij$ であるとき、$Y_i(g')>Y_i(g)$、または、$Y_j(g')>Y_j(g)$ が成立する
(2) $g'=g+ij$ であるとき、$Y_i(g')\geq Y_i(g)$ かつ $Y_j(g')\geq Y_j(g)$ が成立ち、これらの不等式のうち一つが厳密な不等式で成立するならば
g' は g を打ち負かす *(defeat)* という。この定義から、隣接するネットワークによって打ち負かされないネットワークは対安定である。ネットワーク g^1 を打ち負かすように新しいリンク接続を形成したネットワーク g^2 を作成し、さらに、g^2 を打ち負かすネットワーク g^3 を作成し、ネットワークの連鎖 $\{g^1,g^2,g^3,\ldots\}$ を考えることができる。隣接するネットワークの連鎖を作成して行くと、最後に、打ち負かすネットワークが存在しなくなるネットワークに到達する。これが対安定なネットワークとなる。対安定なネットワークがユニークに定まるか否かは不明である。

Watts(2001) は以下のような類似の安定性概念を提案している。この定義では、各プレイヤーの動機にのみ焦点を当てているので、ネットワーク全体の価値関数は無視されている。

定義 4.3 (安定性)
以下の条件が成立するとき、ネットワーク g は各プレイヤー i の利得関数 $u_i(g)$ のもとで安定 *(stable)* であるという。

1. すべての $ij\in g$ に対して、$u_i(g)\geq u_i(g-ij)$, $u_j(g)\geq u_j(g-ij)$ である。
2. すべての $ij\notin g$ に対して、$u_i(g)<u_i(g+ij-ig-jg)$ ならば, $u_j(g)>u_j(g+ij-ig-jg)$ である。ただし、i がネットワーク g においてノード $\{l_1,\ldots,l_k\}$ に直接的にリンク接続しているとき、ig は $\{il_1,\ldots,il_k\}$ の部分集合を表す。

[*17] この対安定性の概念は、Jackson and Wolinsky(1996) によって提案されたものである。

ネットワークのナッシュ均衡は互いのプレイヤーがリンク接続に合意したときにのみリンクが形成されるので、あるプレイヤーがリンク接続を拒否することを認めるている。反面で、二人のプレイヤーが協力して新しいリンク形成を行うことを考慮していない。この意味で、各プレイヤーの利害にのみ依存するナッシュ均衡は必ずしも動的には安定な均衡とならない。ナッシュ均衡の中で動的に安定した均衡が満たすべき条件が上記の概念になっている。*Jackson and Wolinsky* の対安定性では、リンク形成過程で、新しいリンク形成が実現するためには当該両者の合意が必要とされ、一つの新しいリンクの形成もしくは一つの既存リンクの削除ができる想定となっている。*Watts* の安定性では、既存リンクの削除が可能であるが、新しいリンクを形成する際には、既存リンクの削除をすることになっている。

ゲーム理論の提携交渉の安定性の議論から援用した安定性の概念も *Dutta and Mutuswani(1997)* や *Jackson and Nouweland(2005)* によって提案されている。プレイヤーの部分集合 $S \subset N$ が 2 つのネットワーク $g \in \mathcal{G}$ および $g' \in \mathcal{G}$ に関して

(1) $ij \in g'$ かつ $ij \notin g$ ならば、$\{i, j\} \subset S$ であり、

(2) $ij \in g$ かつ $ij \notin g'$ ならば、$\{i, j\} \cap S \neq \emptyset$ であるとき、

提携 S の逸脱によってネットワーク g' がネットワーク g から作成できるという。条件 *(1)* は、いかなる新しいリンクも提携 S に属するプレイヤーによってのみ行われることを示す。条件 *(2)* は削除されたリンクに接続するプレイヤーの一人は必ず提携 S に属することを要求する。

定義 4.4 (強い安定性)
以下の条件が成立するとき、ネットワーク g は各プレイヤー i の利得関数 $u_i(g)$ のもとで強く安定 *(strongly stable)* であるという。すなわち、

(1) あらゆる部分集合 $S \subset N$ に対して、ネットワーク g' が提携 S により g から作成でき、

(2) $u_i(g') > u_i(g)$ となるようなプレイヤー $i \in S$ が存在するならば、$u_j(g') < u_j(g)$ を満たすプレイヤー $j \in S$ が存在する。

強く安定した均衡は対安定したネットワークの部分集合となる。つまり、対安定なネットワークは強く安定なネットワークを含む。もし提携 S が社会全体であるとき、この提携によって互いの利得を増大させるようなより良いネットワークの形成が目指されるので、社会的に効率的なネットワークが形成される筈である。だから、強く安定したネットワークは効率的なネットワークでもある。しかし、強く安定したネットワークが実現するためには、すべてのプレイヤーがネットワーク上のすべてのプレイヤーに関する情報を持たなければいけないし、全員がコミュニケートする必要がある。こうした状況は通常の社会では起こらない。強く安定なネットワークは頑強で、効率的であるが、形成される可能性は低い。

ここで、社会的なコミュニケーションで連結したネットワークを分析するために、ある種の連結モデル *(connections model)* を取り上げる。直接的に連結した隣人からの便益だけでなく、間接的に連結した近隣のプレイヤーからもある種の便益を受けるような社会ネットワークを考える。友好な友人関係を維持するためにはある種のコストが発生する。これらの便益とコストの両者を考慮する必要がある。$b(l_{ij})$ を隣人 j がプレイヤー i にもたらす外部効果による便益の大きさ、c_{ij} をプレイヤー i が隣人 j とのリンクを維持するために必要なコストとする。ネットワーク g の上でプレイヤー i の効用は

$$u_i(g) = \sum_{j \in N, j \neq i} b(l_{ij}(g)) - \sum_{j \in N_i(g)} c_{ij}, \tag{11}$$

と定義する。ここで、l_{ij} はプレイヤー i と j を連結するパスの最小距離数であり、c_{ij} はリンクを維持するために必要なコストである。 プレイヤー i と j を連結するパスがないときは $l_{ij} = \infty$ とおく。ネットワークの

価値を各プレイヤーの利得の総計

$$v(g) = \sum_{i \in N} u_i(g) \tag{12}$$

と定義する。簡単化のために、$b(k) = \delta^k, c_{ij} = c$ とおく。$0 < \delta < 1$ はリンクする距離が長くなればなるほど便益は小さくなる事実を表現する。リンク維持の総費用は $\sum_i c_{ij} = d_i(g)c$ となる。

このモデルでは、リンク連結のコストが小さくて、不等式 $\delta^2 < \delta - c$ が成立するならば、距離 2 のパスでリンクしているプレイヤーとは直接的にリンクした方が効用は大きくなる。この性質を用いて以下のような定理が証明できる。

定理 4.10
各プレイヤーの利得が (11) で与えられ、社会的厚生が (12) であるとする。ただし、$b(k) = \delta^k, c_{ij} = c$ とする。

(i) $\delta^2 < \delta - c$ が成立するならば、効率的なネットワークの構造は完備なネットワークになる。
(ii) $\delta - \delta^2 < c < \delta + \frac{n-2}{2}\delta^2$ ならば、効率的なネットワークの構造はスター型ネットワークである。
(iii) $\delta + \frac{n-2}{2}\delta^2 < c$ ならば、効率的なネットワークの構造は空のネットワークである。

簡単に証明を与える。$\delta^2 < \delta - c$ ならば、明らかに、間接的なリンク接続よりも直接的なリンク接続をする方が大きな利得を獲得できる。だから、すべてのプレイヤーは直接的なリンクで接続されているので、完備なネットワークとなる。ネットワーク g のコンポーネントを g' とし、g' は m 個のノードからなるとする。コンポーネントの各ノードは連結していなければいけないので、このコンポーネントにおけるリンク数を $k \geq m - 1$ とする。この直接的なリンクから得られる利得の総計は $k(\delta - c)$ でとなる。残された間接的なリンク数は $m(m-1)/2 - k$ である（m 個のノードがあるので)。間接的リンクから得られる利得は δ^2 である。従って、このコンポーネントが生み出す価値の総計は

$$v_1 = k(2\delta - 2c) + (m(m-1) - 2k)\delta^2$$

となる。このコンポーネントがスター型ネットワークであるときは、$k = m - 1$ なので、ネットワークの価値は

$$v_2 = (m-1)(2\delta - 2c) + (m-1)(m-2)\delta^2$$

となる。上の式から下の式を差引すると

$$v_1 - v_2 = (k - (m-1))(2\delta - 2c - 2\delta^2) \leq 0$$

が得られる。$v_1 - v_2$ の最大値はゼロで、$k = m - 1$ のとき実現する。つまり、スター型ネットワークの場合に、最大値が実現される。もしスター型ネットワークでなければ、距離 2 以上の間接的なリンクが存在しなければならない。この場合の外部効果の大きさは $2\delta^2$ 未満となるので、ネットワークの価値は最大化されていない。v_2 式から分かる通り、複数のスター型ネットワークから構成されるネットワークの価値より、一つのスター型コンポーネントからなるネットワークの価値の方が大きい。このスター型ネットワークが非負の価値を持たなければいけない条件は $v_2 > 0$、つまり、空のネットワークにならない条件は $\delta + ((n-2)/2)\delta^2 > c$ となる。

利得の配分規則が自己効用最大化そのものだとする。つまり、プレイヤー間に社会的な再配分や所得移転が存在しないとする[*18]。$Y_i(g) = u_i(g)$ と仮定する。この場合、以下のような、対安定性に関する命題が証明できる。

定理 4.11
各プレイヤーの利得が (11) で与えられるとする。ただし、$b(k) = \delta^k, c_{ij} = c$ である。さらに、プレイヤー間に社会的な再配分や所得移転が存在しないとする。

(i) 対安定なネットワークはたかだか（空でない）一つのコンポーネントを持つ。
(ii) $\delta^2 < \delta - c$ ならば、ただ一つの対安定なネットワークは完備なネットワークである。
(iii) $\delta - \delta^2 < c < \delta$ ならば、すべてのプレイヤーがスター型で構成されるネットワークが対安定である。しかし、それが対安定な唯一のネットワークになるとは限らない。
(iv) $\delta < c$ ならば、対安定なネットワークではリンクが存在しないか、もしくは、すべてのプレイヤーが互いに二人のプレイヤーとリンクしている。

簡単な証明を与える。対安定なネットワークは複数のコンポーネントを持つと仮定する。$ij \notin g$ のとき、$u^{ij} = u_i(g+ij) - u_i(g)$、$ij \in g$ のとき、$u^{ij} = u_i(g) - u_i(g-ij)$ とする。いま、$ij \in g$ とする。$u^{ij} > 0$ である。kl が異なるコンポーネントに属するとする。ij は同じコンポーネントに属しており、k はこれとは異なるコンポーネントに属する。$u^{kj} = u_k(g+kj) - u_k(g) > u^{ij} \geq 0$ である。なぜなら、k は j とリンク接続することにより、間接的にリンクされる i からの外部効果も含んでおり、この部分は u^{ij} の中に含まれていない追加的なものだからである。同様の議論により、$u^{jk} > u^{lk} \geq 0$ が成立つ。最初の仮定から、$jk \notin g$ でなければならない。対安定の仮定と矛盾する。よって、対安定なネットワークは一つのコンポーネントを持つこと示している。定理の第 2 項、「$\delta^2 < \delta - c$ ならば、ただ一つの対安定なネットワークは完備なネットワークである」は前記の定理から自明である。不等式 $\delta - \delta^2 < c < \delta$ が成立つとき、対安定なネットワークがスター型になることはほぼ自明である。しかし、リンク接続費用が $\delta - \delta^3 < c < \delta$ の範囲にある場合、直線上のネットワークも対安定である。$\delta < c$ である場合、あるプレイヤー i がプレイヤー j とリンク接続するか否かを考えるとき、リンク先 j のノードが i 以外の（複数）ノードとリンク接続してないなら、j とリンク接続する動機を持たない。従って、空のネットワークでない限り、すべてのプレイヤーは互いに少なくとも二人のプレイヤーとリンクしている。$c < \delta + \frac{n-2}{2}\delta^2$ が成立する場合には、スター型ネットワークが効率的であることが知られているので、この対安定なネットワークは非効率的なネットワークになる。

これらの定理からわかるように、対安定なネットワークは必ずしも効率的であるとは限らない。この事実は、ネットワークにおける各プレイヤー間に働く外部性の存在に起因する。任意の $i \in N$ と、$i \neq j \neq k$ であるようなリンク jk に対して、$u_i(g+jk) \geq u_i(g)$ が成立つとき、リンク形成に非負の外部性が存在する。上記の不等式のうち、$u_m(g+jk) > u_m(g)$ が成立するようなプレイヤー m がいるならば、リンク形成に正の外部性が存在する。

対安定なネットワークが必ずしも効率的なネットワークにならないのは、隣人とリンクを形成するとき、このリンクの形成が隣人に連結する隣人、その隣人の隣人、・・・等々がもたらすリンク形成の外部性を考慮し

[*18] 企業内ネットワークのような社会的ネットワークでは、経営者と労働者の間で賃金率の配分を巡る規則が形成されるので、ネットワークの生産する価値の再配分問題は重要である。こうした案件に答える方向での研究は未開発の領域となっている。ここでは、この案件についてはこれ以上言及しない。

ないことにある。各プレイヤーがこうしたリンク形成の外部性を考慮しないことに起因して、ネットワークの安定性と効率性が両立しない現象が生じてくる。ネットワークの安定性と効率性の関係について、もう少し一般的な考察を進める。*Jackson and Wolinsky(1996)* に従って、以下の概念を導入する。プレイヤーの名前付けに関する置換 $\pi:\ N \to N$ を与えるとき、$g^{\pi} = \{ij \mid i = \pi(k), j = \pi(l), kl \in N\}$ と表記する。さらに、$v^{\pi}(g^{\pi}) = v(g)$ とネットワーク g^{π} の価値関数 v^{π} を定める。

定義 4.5
いかなる置換 π に対しても、$Y_{\pi(i)}(g^{\pi}, v^{\pi}) = Y_i(g, v)$ が成立するならば、配分規則 Y は匿名である *(anonymous)* と言う。

この匿名性の概念は、プレイヤーの名前付けが変化しても、彼らが獲得する利得は変化しないことを保証している。

定義 4.6

1. すべての価値関数とネットワーク構造に対して、$\sum_i Y_i(g, v) = v(g)$ が成立つならば、配分規則 Y は公正である *(balanced)* という。
2. $C(g)$ をネットワーク g のコンポーネントの集合とするとき、$v(g) = \sum_{h \in C(g)} v(h)$ ならば、価値関数 v はコンポーネント加算 *(component additive)* であるという。
3. すべての g と $h \in C(g)$ およびコンポーネント加算な v に対して、$\sum_{i \in N(h)} Y_i(g, v) = v(h)$ ならば、配分規則 Y はコンポーネント公正である *(component balanced)* と言う。

これらの概念を用いて、以下の定理が証明できる[*19]。

定理 4.12
プレイヤー数が *3* 以上であるとする。すべての価値関数 v に対して少なくとも一つの効率的なネットワークを対安定にするような、匿名性をもち、かつ、コンポーネント公正である配分規則は存在しない。

この定理は、効率的なネットワークを対安定なネットワークとして生成する配分規則で、なおかつ、匿名性を持ち、コンポーネント公正である配分規則の存在を排除する価値関数が存在することを意味している。ただし、対安定なネットワークを生成し、匿名性を持ち、コンポーネント公正である配分規則が存在する例を容易に示せる。だから、この定理は、効率的で対安定なネットワークが存在しないことを主張している訳ではない。効率的で対安定なネットワークが存在するためには、配分規則と価値関数の間の関係がある条件を満たさなければならないことを含意する。ただ、この条件の内容がどのように特定できるかは検討すべき案件であるが、未だ詳細は不確定のままである。

最後に、リンク形成の動的な過程における各プレイヤーの経済動機をより明示的に定式化して、リンク形成の安定性とネットワークの生成問題を更に深く考察する。*Watts(2000)* と *Jackson and Watts(2002)* に従って、以下のようなリンク形成メカニズムを想定する。リンク形成の動的な過程は離散時間上で行われる。時刻 $t = 1, 2, \ldots$ で二人のプレイヤーが一つの新しいリンクを接続するかどうか、既存リンクの一つを削除するか否かを意思決定する。各プレイヤーは、リンクパターンを変更して新しいネットワークを形成するとき、既存のネットワークから得られる利得に比較してより大きな利得が得られる限り、新しいリンクを接続する、あるいは、既存リンクを削除する。上の対安定性の説明で触れたように、既存ネットワークを打ち負かすネットワークが作成される。時刻が進むにつれて、既存のネットワークの利得を改善するように、既存リンクを削除し、あるいは、新しいリンクを追加して得られるネットワークの連鎖 $\{g_1, \ldots, g_K\}$ を生み出す。このネット

[*19] 証明は Jackson and Wolinsky(1996) を参照のこと。

ワークの連鎖を改善するパス *(improving path)* と呼ぶことができる。改善するパス上で隣り合うネットワークはリンク接続が一つだけ異なる、言い換えると、隣接している。改善するパスの一つ前に位置するネットワークに新しいリンクが一本追加されているならば、当該のプレイヤーの両者はこのリンク追加に合意していなければならない。既存リンクが削除されているならば、既存リンクに接続されていた二人のプレイヤーのどちらかは、このリンク削除によって利得が増大していなければならない。改善するパス $\{g_1, \ldots, g_K\}$ は以下の条件を満たしている。

$k \in \{1, \ldots, K-1\}$ とおくとき

(1) $Y_i(g_k - ij) > Y_i(g_k)$ を満たすある ij に対して、$g_{k+1} = g_k - ij$、あるいは、

(2) $Y_i(g_k + ij) > Y_i(g_k)$ かつ $Y_j(g_k + ij) > Y_j(g_k)$ を満たすある ij に対して、$g_{k+1} = g_k + ij$ が成立つ。

このリンク形成過程では、各時刻で実行可能な戦略は、一つのリンクを追加するか、既存リンクを削除するかの２項選択である。また、各プレイヤーの利害は各時点での利得の大小という、極めて近視眼的な利害であり、将来に他のプレイヤーがどのような戦略を採用するかまでは考慮していない。後になって、削除してしまった意思決定が間違いであったと分かっても、そのときには元に戻れない。ネットワークのノード数が非常に多数になるとき、各プレイヤーはネットワークの限られた情報しか持ち得ないので、意思決定もこの限定された情報のもとで行うことになる。この意味で、近視眼的な意思決定がそれほど非現実的であるとは言えない。

既に説明したように、改善するパスが有限の連鎖であるならば、つまり、有限の終端が存在するならば、この終端のネットワークは対安定なネットワークに他ならない。しかし、有限の終端が存在しないならば、改善するパスはある時点から周期連鎖 *(cycle)* となる。従って、ネットワークの価値関数 v と配分規則 Y を与えるとき、少なくとも一つの対安定なネットワークが存在する、または、閉じた周期連鎖が存在する。

周期連鎖が存在するが、対安定なネットワークが存在しない例が *Jackson and Watts* によって示されている。４人のプレイヤーが互いに取引を行うことより利得を得ることができるとする。直接的あるいは間接的にリンク接続しているプレイヤー同士が取引に参加できるとする。２種類の消費財 (x, y) を消費することから得られる各プレイヤーの利得を $u(x, y) = 96xy$ とする。リンク接続の費用は $c = 5$ であり、取引をしないときの利得はゼロとする。各プレイヤーの財の初期保有量は $(1, 0)$ または $(0, 1)$ のどちらかで、それぞれ確率 1/2 で起こる。このとき、二人のプレイヤーがリンク接続しているとき、確率 1/2 で一方の初期保有量が $(1, 0)$、他方の保有量が $(0, 1)$ となるので、各プレイヤーが受け取る利得$= \frac{1}{2}96 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 24$ となる。ここで、交渉力は均等と仮定する。確率 1/2 で取引は行われないので、そのとき利得はゼロとなる。よって、リンク接続からの期待利得は 12 となる。リンク接続費用を差し引いた純期待利得は $12 - 5 = 7$ である。他の二人のプレイヤーとの間で取引可能となっているとき（直接的および間接的なリンク接続が存在するとき）、取引からの期待利得は *16*、他の *3* 人のプレイヤーとの間に直接的および間接的なリンク接続が存在するときの期待利得は *18* である。この想定では、対安定なネットワークは存在せず、周期連鎖が存在する。例えば、リンク接続が $\{12, 23, 34\}$ となっているとき、プレイヤー２の純利得は *8* である。プレイヤー２がプレイヤー *1* との間のリンクを削除すると、プレイヤー２の純利得は *18-10=8* から *16-5=11* に増大する。ネットワーク $\{1, 23, 34\}$ はネットワーク$\{12, 23, 34\}$を打ち負かす。ネットワーク$\{1,23,34\}$ で、プレイヤー３がプレイヤー２との間のリンクを削除すると、プレイヤー *3* の純利得が *6* から *7* に増加する。よって、プレイヤー *3* はこのリンクを削除する動機を持つ。ネットワーク $\{1, 2, 34\}$ はネットワーク$\{1,23,34\}$ を打ち負かす。ここで、プレイヤー１とプレイヤー２の間にリンクが形成されると、プレイヤー *1* と２の純利得はゼロから *7* に上昇する。ネットワーク $\{12, 34\}$ はネットワーク$\{1,2,34\}$ を改善する。こうして、改善する連鎖は最初のネットワーク $\{12, 23, 34\}$ に戻って行く。だから、対安定なネットワークは形成されない。

対安定なネットワークが存在するためには、周期連鎖となる改善するパスを排除するなんらかのメカニズムの存在を想定すれば良い。周期連鎖の排除は、協力ゲームでのポテンシャル関数の概念を借用すると可能になる。言い換えると、ポテンシャル関数の存在が確認できれば、周期連鎖を排除することができる。ポテンシャル関数の理論展開については、*Monderer and Shapley(1996)* や *Tardos and Wexler(2007)* などを参照してください。

ここで定式化されたリンク形成過程では、各時刻で二人のプレイヤーが選ばれて、改善する隣接ネットワークが形成されると想定されている。二人のプレイヤーがいかなるメカニズムに基づいて選択されるのか、こうした選択のメカニズムが現実の社会的なネットワーク形成で観察されるのか、などの深刻な疑問が存在する。*Jackson and Watts(2002)* は、ランダム・ネットワークの形成と類似の、二人のプレイヤーがランダムに均等な確率で選択される仮定を導入している。しかし、この仮定も同様の問題を孕んでいる。

4.3 社会的協調とネットワーク・ゲーム

今までは、リンク形成のゲームとリンク形成が行われた後のネットワーク・ゲームをそれぞれ独立に定式化してきた。しかし、社会的経済的ネットワークでは、通常、誰と隣人になるかという意思決定とその隣人と協調した行動を取るか否かを決定している。言い換えると、ネットワーク・ゲームはリンク形成のゲームと隣人間の協調ゲームが相互依存的に関係しており、それぞれを互いに独立な意思決定問題として分析することには無理が伴う。ここでは、リンク形成のゲームと隣人間の協調ゲームを同一のモデル内で整合的に定式化する[*20]。

最初に、*Goyal and Vega-Redondo(2005)* の提案に沿って、一方向のリンク形成が行われ、直接的にリンクされたプレイヤー同士が社会的ゲームを行うモデルを考える。プレイヤー（ノード）の集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ とする。各プレイヤー i のリンク形成の戦略を $g_i=(g_{i1},g_{i2},\ldots,g_{i,i-1},g_{i,i+1},\ldots,g_{in})$ と表記する。$g_{ij}\in\{0,1\},\ j\in N-\{i\}$ である。$g_{ij}=1$ であれば、プレイヤー i からプレイヤー j に一方向でリンク接続している。プレイヤー i の戦略プロファイルは $\mathcal{G}_i=\{0,1\}^{n-1}$ である。 すべてのプレイヤーの戦略プロファイルは $g=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ と表現される。すべてのプレイヤーの戦略プロファイルからなるネットワークの集合を $\mathcal{G}$ とし、実際に形成されたネットワークの一つを $g\in\mathcal{G}$ と表現する。ネットワーク g における方向付けられたリンクの集合 Γ は $\Gamma=\{(i,j)\in N\times N \mid g_{ij}=1\}$ である。

方向付けられたリンクによって接続された二人のプレイヤー間には直接的な外部効果が働く *(two-way flow)* とする。二人のプレイヤー i,j のうちの、少なくとも一人がリンク接続を形成していれば、つまり、$\max\{g_{ij},g_{ji}\}=1$ ならば、二人のプレイヤーは互いに相互依存の関係を持つので、二人は直接的にリンクされている（隣人である）という。プレイヤー間の外部効果のリンク・パターンを表現するために、ネットワーク g から構成されるネットワーク $\bar{g}=(\bar{g}_{ij})$ を $\bar{g}_{ij}=\max\{g_{ij},g_{ji}\},i,j\in N$ と定義する。当然、$\bar{g}_{ij}=\bar{g}_{ji}$ である。もし $\bar{g}_{ij}=1$ ならば、あるいは、$\bar{g}_{i,j_1}=\bar{g}_{j_1,j_2}=\cdots=\bar{g}_{j_m,j}=1$ となるようなノード $j_1,j_2,\ldots,j_m$ が存在するならば、プレイヤー i と j を結ぶ経路（パス）がある。

ネットワークにおいて隣人同士になった各プレイヤーは社会的なゲームに直面する。モデルを簡単化するために、ネットワーク上の社会的なゲームは、一人対多数、多数対多数の形式ではなく、一つのリンクを介した二人の隣人同士間で行われるとする。すべてのプレイヤーの戦略集合は同一で、２種類の行為からなり、$A=\{\alpha,\beta\}$ とする。行為の組 $a,a'\in A\times A$ に対応して、各プレイヤーの利得 π が定まる。この２人ゲーム

[*20] こうした文脈での研究の代表例は、Jackson and Watts(2002a) と Goyal and Vega-Redondo(2005) である。

の利得表は以下の通りである。

2 / 1	α	β
α	(d,d)	(e,f)
β	(f,e)	(b,b)

ここで、効率性とリスク支配の関係を明確に出すために、条件

$$d > f > 0,\ b > e > 0,\ d > b,\ d + e < b + f \tag{13}$$

を仮定する。このゲームは、２つの純粋戦略均衡 (α, α) と (β, β) をもつ協調ゲームとなる。均衡戦略 (α, α) が効率的な均衡で、(β, β) がリスク支配的均衡となる。

一方向リンク形成を想定しているので、リンク接続費用 $c > 0$ はリンクを接続したいと思うプレイヤーが負担する。リンク接続に受け身に対応するプレイヤーはこの費用を負担しない。各リンクの形成費用は同一で、リンク数に依存しないと仮定する。２人ゲームの利得はすべて正と仮定しているので、他のプレイヤーによって行われるリンク接続を拒否する動機は存在しない。協調ゲームに負の利得が起こりうる場合には、この想定は修正されなければならない。

プレイヤー i の戦略集合は $S_i = \mathcal{G}_i \times A$ となる。各プレイヤーのリンク接続に関する決定 $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ を与えるとき、各プレイヤーの隣人集合が確定する。プレイヤー i がリンク接続を実行したプレイヤーの集合を $N_i(g) = \{j \in N \mid g_{ij} = 1\}$ と表記する。リンク接続数を $d_i(g) = |N_i(g)|$ とする。同様に、$N_i(\bar{g}) = \{j \in N \mid \bar{g}_{ij} = 1\}$ を直接的間接的に繋がっている隣人の集合とする。他のプレイヤーの戦略プロファイル $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ を与えるとき、プレイヤー i が戦略 $s_i = (g_i, a_i) \in S_i$ を採用するとき得られる利得を

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \sum_{j \in N_i(\bar{g})} \pi(a_i, a_j) - d_i(g) \cdot c \tag{14}$$

とする。ここで、π は２人協調ゲームでの利得で、各プレイヤーが獲得する（総）利得は各隣人との間で行われる２人協調ゲームの利得の総計となっている。２人協調ゲームの数はリンク形成ゲームの中で内生的に定まり、（総）利得の大きさは各プレイヤーが形成する隣人の規模に依存する。

ここで、ナッシュ均衡を定義する。戦略プロファイル $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ は、すべての $i \in N$ に対して、

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*),\ \forall s_i \in S_i$$

が成立するならば、ナッシュ均衡であるという。すべてのプレイヤーに対して、この不等式が等式ではなく、厳密な不等式で成立するとき、つまり、$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$ となるとき、ナッシュ均衡は厳密であると言う。ナッシュ均衡のの集合を S^*、厳密なナッシュ均衡を S^{**} で表現する。

リンク接続費用が比較的安いとき、例えば、$c < e$ のとき、各プレイヤーは他のプレイヤーの行為に依存せずに、他者とリンク接続をした方が望ましい。完備なネットワークが形成される。他方で、リンク接続費用が比較的に高いとき、例えば、$b < c < d$ のとき、リンク接続を持つすべてのプレイヤーは効率的な行為 (α) を選択する。この場合、α を選択しているすべてのプレイヤーとリンク接続することが望ましくなり、完備なネットワークが登場する。リンク接続費用が比較的に低位水準であるとき、例えば、$f < c < b$ のとき、リンク・パターンは複雑となる可能性がある。$c > f (> e)$ のとき、他のプレイヤー達が同一の行為 (α または β) をしている限り、リンク接続をする価値がある。他方で、$c < b < d$ なので、ゲームに参加しないよりは参加

して協調することを選ぶ。このことは、ネットワーク内に分離した２つのコンポーネントが共存する可能性をもたらす。これをまとめると*21、

定理 4.13
式 $(13, 14)$ を仮定する。このとき

(i) もし $c < \min\{f, b\}$ ならば、均衡ネットワークは完備である。
(ii) もし $f < c < b$ ならば、均衡ネットワークは完備であるか、または、２つの完備なコンポーネントに分割されている。
(iii) もし $b < c < d$ ならば、均衡ネットワークは完備であるか、または、空である。
(iv) もし $c > d$ ならば、ユニークな均衡ネットワークは空である。

ここで、新しい言葉を定義する。g^e で空なネットワーク $(g^e_{ij} = 0, \forall i \neq j \in N)$ を表現する。$g_{ij}g_{ji} = 0, \forall i \neq j \in N$ ならば、ネットワーク g は本質的である *(essential)* という。完備で本質的なネットワークを $G^c = \{g \mid \bar{g}_{ij} = 1,\ g_{ij}g_{ji} = 0,\ \forall i, j \in N\}$ と表記する。ノードの部分集合 $M \subset N$ に対して、M 上で完備で本質的な部分ネットワークを $G^c(M)$ と表現する。戦略 α を選択しているプレイヤーの集合を N^α、戦略 β を選択しているプレイヤーの集合を N^β と表現する。$a_i = \alpha, \forall i \in N^\alpha$ に対応して、$g^\alpha \in G^c(N^\alpha)$ となる部分コンポーネント g^α が存在するならば、N^α に対応する戦略プロファイルを S^α と表記する。同様に、$g^\beta \in G^c(N^\beta)$ となる部分コンポーネント g^β が存在するならば、N^β に対応する戦略プロファイルを S^β と表記する。これらの表記法を用いて、

定理 4.14
式 $(13, 14)$ を仮定する。このとき

(i) もし $c < \min\{f, b\}$ ならば、均衡ネットワークは均質な行為を持つ $G^c(N)$ である。均衡行為プロファイルは $a^* = (a^*_1, \ldots, a^*_n) = (\alpha, \ldots, \alpha)$ または $a^* = (\beta, \ldots, \beta)$ である。
(ii) もし $f < c < b$ ならば、均衡ネットワークはたかだか２つの完備なコンポーネント $G^c(N^\alpha)$ と $G^c(N^\beta)$ に分割される。このうちどちらか一つのコンポーネントは空になることもある。
(iii) もし $b < c < d$ ならば、均衡ネットワークの集合は $S^* = S^\alpha \cup S^{(g^e, (\beta, \ldots, \beta))}$ である。
(iv) もし $c > d$ ならば、均衡ネットワークの集合は $S^* = \{g^e\} \times A^n$ である。

この定理の *(ii)* 以外は前の定理からほぼ自明である。*(ii)* は、ネットワークが共通の行為を選択するプレイヤーからなる２つのコンポーネントに分離されることを示している。このネットワーク構造が均衡であることは、リンク接続の受動的な受け手プレイヤーとしての利益の存在から説明される。各コンポーネントでは、すべてのプレイヤーはリンク接続の受け手としての利得も得ている。あるプレイヤーが行為を変更するとき、この変更からの便益を十分に獲得するためには、別のグループのプレイヤーのすべてにリンク接続することが必要であるが、その費用も負担しなければならない。しかし、この動機による利得の増大は見込まれないので、行為を変更する動機を持たない。

ゲームの動的な挙動について考えてみる。時刻は離散的に進み、時刻を $t = 1, 2, \ldots, .$ と表記する。時刻 t での戦略プロファイルを $s(t) = [(g_i(t), a_i(t)]^n_{i=1}$ と表現する。各時刻において、確率 $p \in (0, 1)$ で各プレイ

*21 以下の定理の証明については、Goyal and Vega-Redondo(2005) を参照のこと。

ヤーが彼の戦略を変更する機会を与えられる。プレイヤー i がこの機会を与えられるとき、彼は最適な戦略

$$s_i(t) \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}(t-1))$$

を選択する。戦略を変更する機会を得たプレイヤーは、時刻 $(t-1)$ において他のプレイヤーが採用した戦略 $s_{-i}(t-1)$ に対して近視眼的に最適な反応 $s_i(t)$ を選択する。複数の選択肢が存在する場合、その中の一つを無作為に選ぶとする。このような戦略変更の過程は $S = S_i \times \cdots \times S_n$ 上で単純なマルコフ過程となる。ここでの想定では、マルコフ過程に複数の吸引状態 *(absorbing states)* が存在する。この吸引状態が厳密なナッシュ均衡となることは容易に想像できる。

$\bar{S}$ で戦略変更の動的過程の吸引状態を表記する。$\bar{S}$ と厳密なナッシュ均衡の集合 S^{**} が一対一に対応することが分かる。上の定理から、$c < b$ のとき、すべてのナッシュ均衡は厳密であり、$b < c < d$ のときは、S^{α} に属するナッシュ均衡のみが厳密である。$c > d$ のときは、厳密なナッシュ均衡は存在しない。よって、$c < d$ の条件のもとで、初期状態での戦略プロファイルがどのようなものであれ、初期状態から出発した戦略変更のダイナミックスは確率 *1* で社会的ゲームの厳密なナッシュ均衡に収束する*22。戦略変更のダイナミックスの極限は潜在的には確率的に安定な状態である。確率的に安定な状態の集合を $\hat{S} = \{s \in S \mid \hat{\mu}(s) > 0$ と表現する。$\hat{\mu}$ はマルコフ過程における吸引状態の不変確率分布である。この結果から、以下の定理が成立する。

定理 4.15
式 $(13, 14)$ を仮定する。非常に大きな n に対して、以下のような条件を満たすある閾値 $\bar{c} \in (e, b)$ が存在する。つまり、もし $c < \bar{c}$ ならば、$\hat{S} = S^{\beta}$ であり、もし $\bar{c} < c < d$ ならば、$\hat{S} = S^{\alpha}$ であるような、$\bar{c}$ が存在する。$c < d$ のときは、$\hat{S} = \{g^e\} \times A^n$ である。

以上の議論では、すべてのプレイヤーが保有するネットワーク情報が完備であるという仮定、および、各プレイヤーが社会的 *2* 人ゲームを行うという簡単化の仮定を前提として定式化されている。さらに、そのモデルに、ランダムに選ばれたプレイヤーによる戦略変更のダイナミックが導入された。こうしたモデルは、確率的に安定な均衡状態が極めて単純なネットワーク構造に帰着することを予測している。しかし、現実の社会的ネットワークの特徴はモデルが予測するほど単純ではないし、ネットワークの動学的な挙動は、*2* 人ゲームでの定式化を遥かに越えて、より複雑なゲーム構造から生まれている。

次に、双方リンク形成のモデルによる分析を取り上げる。二人のプレイヤーの間のリンク接続の費用は両者で折半される。その費用は一人当たり $c > 0$ とする。前と同じく、プレイヤー（ノード）の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする。プレイヤー i のリンク形成計画の戦略を $g_{ij} \in \{0, 1\},\ j \in N - \{i\}$ とする。プレイヤー i のリンク形成の戦略プロファイルは $g_i = \{g_{ij}\}_{j \in N - \{i\}}$ となる。すべてのプレイヤーのリンク形成戦略プロファイルは $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ である。リンク形成戦略プロファイルの集合は $\mathcal{G} = \Pi_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$ である。$g_{ij} = g_{ji} = 1$ のときにのみ、プレイヤー i と j の間にリンクが接続される。すべての戦略プロファイル $g = (g_1, \ldots, g_n)$ は双方向（方向付けられていない）リンク接続のネットワーク g を生み出す。

一方向リンク形成モデルと同じく、ネットワークにおいて隣人同士になった各プレイヤーが *2* 人ゲームに参加する。ただし、リンク形成が確定した後に、*2* 人ゲームが行われると想定されている。ネットワーク上の社会的な *2* 人ゲームは、一人対多数、多数対多数の形式ではなく、一つのリンクを介した二人の隣人同士間で行われるとする。すべてのプレイヤーの戦略集合は同一で、２種類の行為からなり、$A = \{\alpha, \beta\}$ とする。行為の組 $a, a' \in A \times A$ に対応して、各プレイヤーの利得が定まる。この２人ゲームの利得表は一方向リンク形成モデルと同じであるとする。

*22 厳格な証明は、Goyal and Vega-Redondo(2005) を参照のこと。

プレイヤー i の戦略集合は $S_i = \mathcal{G}_i \times A$ となる。リンク接続に関する決定 $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ を与えるとき、各プレイヤーの隣人集合が確定する。プレイヤー i とリンク接続しているプレイヤーの集合を $N_i(g) = \{j \in N \mid g_{ij}g_{ji} = 1\}$ と表記する。積 $g_{ij} \cdot g_{ji}$ はリンク形成は両者合意のもとで行われることを示している。リンク接続数を $d_i(g) = |N_i(g)|$ とする。他のプレイヤーの行為 $a_{-i} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ を与えるとき、プレイヤー i が行為 $a_i \in A_i$ を採用するとき得られる利得は

$$u_i((a_i, a_{-i}), g) = \sum_{j \in N_i(g)} \pi(a_i, a_j) - d_i(g) \cdot c \tag{15}$$

と定義される。2人ゲームの数はリンク形成ゲームの中で内生的に定まり、利得の大きさは各プレイヤーが形成する隣人の規模に依存する。このとき、対安定性の定義を以下のように与える。

定義 4.7 (対安定性)
利得関数が式 (15) である。以下の条件が成立するとき、戦略の組 $\omega = (a, g) \in A \times \mathcal{G}$ は対安定である。

(a) $u_i(a, g + ij) \geq u_i(a, g)$ かつ $u_j(a, g + ij) \geq u_j(a, g)$（一つの不等式が等式で成立たない）であるような $i, j \in N$ が存在しない。
(b) いかなる $i, j \in N$ に対しても、2つの不等式 $u_i(a, g - ij) > u_i(a, g)$ と $u_j(a, g - ij) > u_j(a, g)$ が成立たない。
(c) すべての $i \in N$ に対して、$u_i(a, g) \geq u_i((a'_i, a_{-i}), g),\ a'_i \in A_i$ である。

各プレイヤーの協調ゲームが上で取り上げたような *2* 人ゲームで記述されるとき、対安定なネットワークは以下のように分類できる。条件 (13) が満たされると仮定する。

(i) $c < e (= \min\{b, d, e, f\})$ のとき、対安定な戦略プロファイルの組 $\omega = (a, g)$ は同一な行為 $a = (\alpha, \ldots, \alpha)$ または $a = (\beta, \ldots, \beta)$ を伴う完備なネットワークからなる。
(ii) $e < c < b$ のとき、対安定な戦略プロファイルの組 $\omega = (a, g)$ はたかだか2つの完備なコンポーネントに分解できる。$g = g^\alpha + g^\beta$ と表現でき、g^α は行為 α を採用したプレイヤーの完備なネットワーク、g^β は行為 β を選ぶプレイヤーからなるネットワークである。なお、$g^\alpha (g^\beta)$ は空なネットワークとなる可能性がある。
(iii) $b < c < d$ のとき、対安定な戦略プロファイルの組 $\omega = (a, g)$ は行為 α を選択するプレイヤーからなる完備なコンポーネントと空な部分ネットワークに分解できる。
(iv) $d < c$ のとき、対安定な戦略プロファイルの組 $\omega = (a, g)$ は空なネットワークである。

これらの分類が成立つことは容易に理解できる。ここで、これらの対安定なネットワークのうち、どれが確率的に安定な状態になるのかについて考察する。この分析のためには、対安定性の概念と整合的な動的戦略変更過程を考える必要がある。*Jackson and Watts(2002a, b)* が提案したマルコフ過程による定式化に従う。動的調整過程は以下のステップで実行されるとする。

(a) 二人のプレイヤー $i, , j$ がランダムに同一の確率に従って選択され、彼らの間のリンク接続が変更される。

(i) 時刻 t でリンク ij が存在するとき ($g_{ij} \in g(t-1)$ のとき)、

$u_i(a(t-1), g(t-1) - ij) > u_i(a(t-1), g(t-1))$、あるいは、$u_j(a(t-1), g(t-1) - ij) > u_j(a(t-1), g(t-1))$

ならば、そのリンク ij は削除される。

(ii)　時刻 t でリンク ij が存在しないとき ($g_{ij} \notin g(t-1)$ のとき)、

$$u_i(a(t-1), g(t-1)+ij) \geq u_i(a(t-1), g(t-1))、かつ、u_j(a(t-1), g(t-1)+ij) \geq u_j(a(t-1), g(t-1))$$

ならば（不等式の一つは等式でないとして)、リンク ij が新しく作成される。

(b)　その後、一人のプレイヤーがランダムに選ばれて、従来の行為を変更する機会が与えられる。プレイヤー i が選ばれるとき、i は $a_i(t) \in \arg\max u_i(a_i, a_{-i}(t-1), g(t))$ で最適な行為を選択する。

このように動的な調整過程が実行されるならば、定常状態は明らかに対安定なネットワークと一致する。任意の初期状態から開始された動的なネットワークの生成過程は時間が進むにつれて最終的にはこの対安定な状態のいずれかに到達する。対安定な均衡がユニークに存在する場合は答えは自明である。しかし、複数存在するとき、対安定なネットワークの中のどれに収束するかという疑問が生じる。リンク接続費用が $c < b$ のとき、複数個の対安定な均衡が存在する。

この問題に対処するために、*Jackson and Watts(2002a)* は動的な調整過程に確率的な摂動を加える方法 *(perturbed dynamics)* を採用した。一つの撹乱として、調整過程の (a) の後、ある確率 γ で結果を元に戻すような摂動が加わると仮定する。もう一つの撹乱は、調整過程の (b) の後、ある確率 ϵ で最適な反応をもとの戦略に戻すという摂動を想定する。合計で、2 種類の撹乱が加わったマルコフ過程となる。このマルコフ過程は定常状態を持つので、それに対応する不変確率分布 $\mu^{\gamma,\epsilon}$ が存在する。対安定な戦略プロファイルの組 $\omega = (a, g)$ は、それが確率分布 $\hat{\mu} = \lim_{\gamma,\epsilon \to 0} \mu^{\gamma,\mu}$ のサポート内に位置するならば、確率的に安定である *(stochastically stable)* と言う[*23]。

$c < e$ のとき、α を選択するプレイヤーからなる完備なネットワークと β を全員が選ぶ完備なネットワークが対安定である。β を選択する均衡がリスク支配的な戦略なので、撹乱が加わる場合、β を選択する傾向が強くなり、β を全員が選んでいる完備なネットワークが確率的に安定な均衡となる。

以上のリンク形成ゲームのモデルでは、重要な 3 つの仮定が置かれている。一つは、ネットワーク・ゲームに参加するすべてのプレイヤーに関する情報が各プレイヤーの共有知識であると想定していることである。2 つ目の仮定は、社会的協調ゲームを多数対多数のゲームではなく、2 人ゲームとして定式化していることである。三つ目は、動的な調整過程で各プレイヤーがランダムに均一の確率で選択されるとする仮定と外的撹乱に関わる仮定である。このような単純化の仮定のもとで、一方向リンク形成モデルも、双方向リンク形成モデルも、リンク形成ゲームと社会的ゲームを統合することに一定程度の成功を収め、ある意味でクリアーカットな結論を導きだすことに成功している。しかし、前提的な仮定の非現実性はもとより、現実の複雑な社会的ネットワークの特徴を説明することには失敗している。例えば、べき乗則に従う次数分布、比較的に大きなクラスタリング、比較的短いノード間の平均距離、そして、隣接するノード間の次数分布の相関関係などを説明することができない。また、現実のネットワークは時間とともに生成、進化成長、発展しており、定常状態として説明できるものではない。さらに言えば、各主体の行為が 2 人ゲームによって理解できるほど、現実の社会的ゲームは単純な構造をしていない。より現実的な仮定を組み入れた定式化が要請されている[*24]。

[*23] Young(1993,98) は、制度や規範の生成ににおける stochastic stability 概念の重要性を指摘し、進化ゲーム的なモデルを提案している。

[*24] Ehrhardt and Vega-Redondo(2008) は、ネットワークの形成モデルにボラティリティーを明示的に導入して、ネットワークの生成、進化の頑強性を説明することを試みている。

5 結び

本稿の前半では、ネットワーク・パターンが所与のもとでのネットワーク・ゲームを考察した。完備情報のもとでのグルフィカル・ゲームとして定式化される公共財のネットワーク・ゲームの均衡では、フリーライダー（ただ乗り）が必ず存在し、そうしたフリーライダーを伴う均衡が安定な均衡となる。公共財の理論が教示する通り、ナッシュ均衡は社会的に効率的でない。正規ネットワークでは、各プレイヤーが公平に同じ努力水準で貢献するナッシュ均衡が存在するが、これは不安定である。さらに、フリーライダーを伴う均衡での社会的厚生は各プレイヤーが同等の貢献をするナッシュ均衡での社会的厚生よりも大きい。また、プレイヤーの隣人数の増加が必ずしも社会的厚生の増加を引き起こすことにはならない。スター型ネットワークで典型的に見られる通り、各プレイヤーの次数の大小は最適戦略との関係性は不明瞭である。

ネットワーク・ゲームに不完備情報の問題を明示的に導入すると、上記結論はどのように修正されるのか。閾値モデルでの分析から得られる結論は以下の通りとなった。各プレイヤーの利得が隣人数自体に依存せず、隣人の中で正の行為を採用している隣人数にのみ依存するという仮定のもとでは、ゲームが戦略的補完性を持つとき、最適戦略は各プレイヤーの次数の増加関数となる。ゲームが戦略的代替性を持つとき、最適戦略は各プレイヤーの次数の減少関数となる。モデルを一般化したケースでこれらの結論が維持できるか否かについては、未だ未解決となっている。

後半では、ネットワークの形成ゲームとそのもとでの社会的交渉ゲームの特質に関して分析した。一方向リンク形成のモデルでは、一方向外部効果のもとでは、ある条件下で円型ネットワークが厳密なナッシュ均衡であり効率的になる。双方向外部効果のもとでは、空なネットワークまたは中心部費用負担のスター型ネットワークが厳密なナッシュ均衡となる。外部効果が隣人との距離に依存するようなケースでは、利得関数が非常に単純な場合でも、リンク接続費用の変化に伴って、ナッシュ均衡のネットワークのリンク構造が劇的に変化することを指摘した。これらの結論は、非常に単純化された線形利得関数の仮定、および、各プレイヤーが保有する情報が完備であるとする仮定のもとで導出されたものである。これらの結論が、より一般的なネットワーク・ゲームに拡張できるか、どのように修正されなければならないかとする案件は残された課題である。

双方リンク形成のモデルでは、ナッシュ均衡ネットワークの安定性が重要な問題になる。対安定なネットワークは接続費用に依存して、完備なネットワークあるいはスター型ネットワークになることが分かる。しかし、対安定なネットワークは必ずしも効率的であるとは限らない。これは、各プレイヤーが意思決定するとき、直接的な外部性は考慮の対象にするけれども、間接的な外部性までは明示的に考慮しないことに起因する。ネットワーク形成の安定性と効率性に関する案件は未だ解決されているとは言い難い。

リンク形成ゲームとリンク形成後の社会的ゲームを統合しようとする定式化では、社会的な協調ゲームが *2* 人ゲームとしてモデル化されており、現実での社会的協調ゲームとはほど遠い想定になっている。また、リンク形成ゲームでも、二人のプレイヤーがランダムに組み合わされる構造が想定されている。社会的ゲームとリンク形成ゲームを統合しようとする研究は端緒についた段階である。

参考文献

[1] Elliot Anshelevich, F. B. Shepherd and Gordon Wilfong(2011), Strategic network formation through peering and service agreements, Games and Economic Behavior, 73, 17-38.

[2] Venkatesh Bala and Sanjeev Goyal(2000), A noncooperative model of network formation, Econo-

metrica, 68(5), 1181-1229.

[3] *Coralio Ballester, Antonio Calvó-Armengol and Yvse Zenou(2006), Who's who in networks. wanted: the key player, Econometrica, 74(5), 1403-1417.*

[4] *Larry Blume, David Eassley, Jon Kleinberg, Robert Kleinberg and Éva Tardos(2011), Network formation in the presence of contagion risk, mimeo.*

[5] *Yann Bramoullé and Rachel Kranton(2007), Public goods in networks, Journal of Economic Theory, 135, 478-494.*

[6] *Yann Bramoullé, Rachel Kranton and Martin D'Amours(2013), Strategic interaction and networks, forthcoming to American Economic Review.*

[7] *Lawrence E. Blume, David Easley, Jon Kleinberg, and Eva Tardos(2009), Trading networks with price-setting agents, Games and Economic Behavior, 67, 36-50.*

[8] *Bhaskar Dutta and Suresh Mutuswami(1997), Stable networks, Journal of Economic Theory, 76, 322-344.*

[9] *Bhaskar Dutta, Sayantan Ghosal, and Debraj Ray(2005), Forsighted network formation, Journal of Economic Theory, 122, 143-164.*

[10] *David Easley and Jon Kleinberg(2010), Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a High Connected Worlds,* Cambridge University Press.

[11] *George Ehrhardt, Matteo Marsili and Fernando Vega-Redondo(2008), Emergence and resilience of social networks: a general theoretical framework, Annales d'Économie et de Statistique, 86, 1-13*

[12] *Francesco Feri(2007), Stochatic stability in networks with decay, Journal of Economic Theory, 135, 442-457.*

[13] *Drew Fudenberg and Jean Tirole(1991), Game Theory, MIT Press.*

[14] *Douglas M. Gale and Shachar Kariv(2007), Financial Networks, American Economic Review, 97(2), 99-103.*

[15] *Andrea Galeotti, Sanjeev Goyal, Matthew O. Jackson, Fernando Vega-Redondo and Leeat Yariv(2010), Network games. Review of Economic Studies, 77,218-244.*

[16] *Andrea Galeotti, Sanjeev Goyal and Jurjen Kamphorst(2006), Link formation with heterogeous players, Games and Economic Behavior, 54, 353-372.*

[17] *Sanjeev Goyal and Sumit Joshi(2006), Bilateralism and free trade, International Economic Review, 47, 749-778.*

[18] *Sanjeev Goyal and Fernando Vega-Redondo(2005), Network formation and social coordination, Games and Economic Behavior, 50, 178-207.*

[19] *Sanjeev Goyal and Fernando Vega-Redondo(2007), Structural holes in social networks, Journal of Economic Theory, 137, 460-492.*

[20] *Daniel A. Hojman and Adam Szeidl(2008), Core and periphery in networks, Journal of Economic Theory, 139, 295-309.*

[21] *Matthew O. Jackson(2008), Social and Economic Networks,* Princeton University Press.

[22] *Matthew O. Jackson and A van den Nouweland(2005), Strongly stable networks, Games and Economic Behavior, 51, 420-444.*

[23] *Matthew O. Jackson and BrianW. Rogers(2007), Meeting strangers and friends of friend: how*

random are social network?, *American Economic Review*, 97(39, 890-915.

[24] Matthew O. Jackson and Leeat Yariv(2007), Diffusion of behavior and equilibrium properties in network games, *American Economic Review*, 97(2), 92-98.

[25] Matthew O. Jackson and Alison Watts(2002a), The evolution of social and economic networks, *Journal of Economic Theory*, 106, 265-295.

[26] Matthew O. Jackson and Alison Watts(2002b), On the formation of interaction networks in social coordination games, *Games and Economic Behavior*, 41, 265-291.

[27] Matthew O. Jackson and Alison Watts(2010), Social games: matching and the play of finitely repeated games, *Games and Economic Behavior*, 70, 170-191.

[28] Matthew O. Jackson and Wolinsky(1996), A strategic model of social and economic networks, *Journal of Economic Theory*, 71, 44-74.

[29] Sham Kadade, Michael Kearns, John Langford and Luis Ortiz(2003), Correlated equilibrium in graphical games, *ACM Conference on Electronic Commerce*.

[30] Michael Kearns(2007), Graphical games, chapter 7 in *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press.

[31] Michael Kearns, Michael L. Littman and Satinder Singh(2001), Graphical models of game theory, *Proceedings of the 17th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence* , 253-260.

[32] Chongmin Kim and Kam-Chau Wong(2007), Network formation and stable equilibrum, *Journal of Economic Theory*, 133, 536-549.

[33] Rachel E. Kranton and Deborah F. Minehart(2001), A theory of buyer-seller networks, *American Economic Review*, 91(3), 485-508.

[34] Paul Milgrom and Chris Shannon(1994), Monotone compatative statics, *Econometrica*, 62(1), 157-180.

[35] Dov Monderer and Lloyd S. Shapley(1996), Potential games, *Games and Economic Behavior*, 14, 124-143.

[36] Stephen Morris(2000), Contagion, *Review of Economic Studies*, 67, 57-78.

[37] Roger B. Myerson(1991), *Game Theory: Analysis of conflict*, Harvard University Press.

[38] Mark E. J. Newman(2010), *Networks: An Introduction*, Oxford University Press.

[39] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein(1994), *A Course in Game Theory*, MIT Press.

[40] Éva Tardos and Tom Wexler(2007), Network formation games and the potential function method, *Algorithmic Game Theorey*, Cambridge University Press.

[41] John Maynard Smith(1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press（日本語訳『進化とゲーム理論』産業図書）.

[42] Fernando Vega-Redondo(2007), *Complex Social Networks*, Cambridge University Press.

[43] Alison Watts(2001), A dynamic model of network formation, *Games and Economic Behavior*, 34, 331-341.

[44] Jorgen W. Weibull(2002), *Evolutionary Game Theory*, MIT Press.

[45] Timothy Van Zandt and Xavier Vives(2007), Monotone equilibria in Bayesian games of strategic complemetarties, *Journal of Economic Theory*, 134, 339-360.

[46] H. Peyton Young(1993), The evolution of conventions, *Econometrica*, 61, 57-84.

[47] H. Peyton Young(1998), *Individual Startegy and Social Structure: An evolutionary theory of institutions*, Princeton University Press.