『経済研究』（明治学院大学）第 165 号　2023 年

緩和された匿名性・中立性条件に基づく社会選択ルール

齋　藤　弘　樹

1. はじめに

本稿では，標準的な集合的選択問題，すなわち，ある社会の構成員の選好に基づいて，その社会が直面している選択肢の中から１つの選択肢を選出する状況を考える。例えば，ある市の市長を複数の候補者の中から選出する状況や，会議においてある議題の採否を決定する状況，さらには，ある家族が旅行の行き先を決めようとする状況なども挙げられる。そのような状況において，その社会の構成員の選好を集計して選択肢を１つ選出する手続きを社会選択ルール（以降では，単に「ルール」）と呼ぶことにする[1]。現実の多くの場面で用いられている多数決は，代表的なルールの１つである。多数決にこだわることなく，何らかの望ましさの基準に基づくもっともらしいルールを追求することは，本問題の主要なテーマの１つである。

本稿では，主要な望ましさの基準として，個人間と選択肢間の両方の平等待遇を取り挙げる。すなわち，社会の構成員をできる限り等しく取り扱い，同時に，直面する選択肢もできる限り等しく取り扱うようなルールを是として追求する[2]。さて，そのような平等待遇条件の中で最も代表的な条件は匿名性と中立性である。匿名性は個人間の平等待遇条件であり，社会の構成員の名前を任意に入れ替えても選出される選択肢は変わらない（すなわち，社会的な意思決定が構成員の名前に依存しない）ことを要求する。一方，中立性は選択肢間の平等待遇条件であり，社会的な選択肢の名前を任意に入れ替えても，選出される選択肢は本質的に同一である（すなわち，社会的な意思決定が選択肢の名前に依存しない）ことを要求する。

匿名性と中立性は，平等待遇基準の観点から極めて自然な条件であるが，深刻な問題を内包している

1　このような手続きは，しばしば社会選択関数と呼ばれるが，本稿では簡単にルールと呼ぶ。

2　本稿のように，いわゆる投票環境と同じ構造の問題では，平等待遇の重視は正当化されるだろう。

ことが知られている。すなわち，これらの条件は，社会的な選択肢を 1 つ選出するような多くの場面において両立しないのである[3]。この事実により，あらゆる場面で個人を平等に取り扱い，選択肢も平等に取り扱うような「理想的な」ルールの追求はもはや諦めなければならない。先行研究では，この問題に対する妥協案として，匿名性や中立性を緩和することで個人間と選択肢間の平等待遇の衝突を回避し，部分的な平等待遇の両立を試みてきた。Campbell and Kelly（2011）は選択肢が 2 つのケースを扱い，中立性をそのまま残し，匿名性を緩和することで，個人間と選択肢間の平等待遇のある程度の両立を図り，それらの条件と多数決ルールとの関係を分析した。Jeong and Ju（2017）も同様に選択肢の数が 2 つのケースを扱い，匿名性をそのまま残して中立性を緩和して，多数決ルールの特徴付けを行った。本稿では，選択肢の数が 3 つ以上の一般的な設定での分析の足掛かりとして，主に 3 つの選択肢のケースを扱い，Campbell and Kelly（2011）および Jeong and Ju（2017）で用いられた匿名性と中立性の緩和条件をそれぞれ本設定に合わせて再定義し，これらの条件と共にいくつかの補助条件を満たすルールを分析する。主要な結果として，構成員の人数が特定の条件を満たすとき，そのようなルールは相対多数ルール[4] のクラスに属するが，その条件を満たさないときは，一部の選好組において相対多数と異なる選択肢を選出するルールとなる場合もあることが示される。これは先行研究と対照的な結果であり，3 つ以上の選択肢におけるルールの複雑さを示している。

2 節では基本的な設定および公理を与える。3 節では相対多数ルールを定義し，公理との関係を述べる。4 節では選択肢の数が 3 つのケースの主要な結果を与える。5 節では得られた結果について議論する。6 節では証明を与える。

2. 定義

2-1. 設定

設定は，齋藤（2022）および Saitoh（2022）と選択肢の数を除いて同一であり，表記もほぼ共有される。集合 $N=\{1, \ldots, n\}$ $(n \geq 3)$ を，ある社会の構成員の集合とする。有限集合 $X (|X| \equiv m \geq 3)$ を，その社会で直面する選択肢の集合とする。各 $i \in N$ は，どの 2 つの選択肢も無差別にならない（強）選好 P_i を持つ。形式的には，P_i は X 上で定義された比較可能性[5]・推移性・非対称性を満たす二項関係である。$\mathcal{P}$ をすべての選好の集合とする。各構成員の選好組 $P=(P_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ をプロファイルと呼ぶ。ルール f は，写像 f: $\mathcal{P}^N \rightarrow X$ である。

2-2. 公理

はじめに，平等待遇基準に関わる公理を与える。匿名性は個人間の標準的な平等待遇条件であり，中

3　これは，選択肢を 1 つ選出する手続きを採用する場合に限って生じる問題であり，選択肢を複数選出することを許容する手続き（社会選択対応）を用いると両立することに注意する。詳細は，齋藤（2022）を参照。

4　相対多数ルールは，2 変数で定義された多数決ルールを 3 変数以上に自然に拡張したルールである。

5　任意の互いに異なる $x, y \in X$ に対して、xP_iy または xP_ix が成り立つ。

立性は選択肢間の標準的な平等待遇条件である。以降で与えられる緩和条件との区別のために，必要に応じてこれらをそれぞれ通常の匿名性・通常の中立性と呼ぶ場合もある。

（通常の）匿名性：任意の $P=(P_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$，任意の $P'=(P_i')_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$ に対して，もし「任意の $j\in N$ に対して，$P_j=P'_{\pi(j)}$」を満たす置換 $\pi:N\to N$ が存在するならば，$f(P)=f(P')$。

（通常の）中立性：任意の $P=(P_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$，任意の $P'=(P_i')_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$ に対して，もし「任意の $j\in N$ および任意の $x,y\in X$ に対して，$xP_jy\Leftrightarrow\sigma(x)P_j'\sigma(y)$」を満たす全単射 $\sigma:X\to X$ が存在するならば，$\sigma(f(P))=f(P')$。

匿名性は，構成員の個人名を任意に入れ替えても選出される結果が同一であることを意味し，中立性は，選択肢名を任意に入れ替えても選出される結果が本質的に同一であることを意味する。前述のように，これらの条件は，常に選択肢を1つのみ選ぶ状況では必ずしも両立せず，特定の条件を満たす選択肢の数 m と構成員の数 n の組（m,n）のもとでのみ両立する。Moulin（1983）は，匿名性と中立性が両立するための（m,n）の必要十分条件を与えている。

この一般的な非両立性を出発点として，本稿では両条件をそれぞれ緩和させた2つの条件（弱匿名性・弱中立性）を考える。弱匿名性（Campbell and Kelly（2011）に基づく[6]）は，個人間の平等待遇条件であり，匿名性の緩和条件の1つである。弱中立性（Jeong and Ju（2017）に基づく）は，選択肢間の平等待遇条件であり，中立性の緩和条件の1つとみなされる。先行研究で与えられたオリジナルの両条件は，2つの選択肢の間でそれらを好む人数が異なる（すなわち，「同点」にならない）プロファイルのもとでのみ，匿名性あるいは中立性と同等の条件を課したものと解釈できる。本稿で扱う弱匿名性・弱中立性は，この解釈を維持したまま3つ以上の選択肢に適用できるように再定義したものである。これらの条件を描写するために，いくつかの表記を与える。

まず，$i\in N$ と $P_i\in\mathcal{P}$ が与えられたとき，$t(P_i)\in X$ を，

$$\text{任意の } x\in X\setminus\{t(P_i)\} \text{ に対して } t(P_i)P_ix$$

を満たす選択肢とする。すなわち，$t(P_i)$ は i が P_i のもとで最も好む選択肢を表す。以降では，$t(P_i)$ をしばしば「（P_i における）1位の選択肢」と表現する。次に，$x\in X$ と $P=(P_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$ が与えられたとき，集合 $N(x,P)$ を

$$N(x,P)=\{i\in N:t(P_i)=x\}$$

と定義する。すなわち，$N(x,P)$ は P のもとで x を最も好む個人の集合を表す。このとき，$|N(x,P)|$ は P のもとで x を最も好む個人の人数を表しているが，これを単記投票の環境に当てはめると，「P のもとで x が獲得する票数」と同一視できる。以降では，表記や公理の理解のために，票数に基づいた説明を多用する。

6　弱匿名性は，Campbell and Kelly（2011）において部分的匿名性（Partial Anonymity）と呼ばれていた条件をもとにしているが，本稿では後述の弱中立性に合わせて，弱匿名性と呼称する。

次に，$P \in \mathcal{P}^N$ と $\ell \in \{0, 1, \cdots, n\}$ が与えられたとき，集合 $X_\ell(P)$ を

$$X_\ell(P) = \{x \in X : |N(x, P)| = \ell\}$$

と定義する。すなわち，$X_\ell(P)$ は P のもとで ℓ 票獲得する選択肢を表す。最後に，$P \in \mathcal{P}^N$ が与えられたとき，$\ell(P) \in \{1, \ldots, n\}$ を，

$$X_{\ell(P)}(P) \neq \emptyset，かつ，X_\ell(P) \neq \emptyset となる任意の \ell \in \{1, \ldots, n\} に対して \ell(P) \geq \ell$$

を満たす数とする。$X_{\ell(P)}(P)$は最も多くの票を獲得する選択肢（すなわち，相対多数の選択肢）の集合と解釈され，$\ell(P)$はそのときの得票数を表す。どのような P でも $\ell(P)$が存在することは明らかである。以上の準備をもとに，匿名性・中立性の緩和条件である弱匿名性・弱中立性は以下のように描写される。

弱匿名性：$|X_{\ell(P)}(P)| = 1$ となる任意の $P = (P_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ および任意の $P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ に対して，もし「任意の $j \in N$ に対して，$P_j = P'_{\pi(j)}$」を満たす置換 $\pi : N \to N$ が存在するならば，$f(P) = f(P')$。

弱中立性：$|X_{\ell(P)}(P)| = 1$ となる任意の $P = (P_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ および任意の $P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ に対して，もし「任意の $j \in N$ および任意の $x, y \in X$ に対して，$xP_jy \Leftrightarrow \sigma(x)P'_j\sigma(y)$」を満たす全単射 $\sigma : X \to X$ が存在するならば，$\sigma(f(P)) = f(P')$。

弱匿名性は，相対多数の選択肢が 1 つのプロファイルに限って，通常の匿名性と同様に名前を入れ替えても結果が不変であることを要求する。弱中立性は，相対多数の選択肢が 1 つのプロファイルに限って，通常の中立性と同様に結果の本質的な不変性を要求する。言い換えると，どちらの条件も相対多数の選択肢が複数存在するような状況では結果の同一性を一切要求していない。すなわち，そのような状況では非対称的な取り扱いがなされる個人・選択肢が存在し得る。通常の匿名性・通常の中立性がそれぞれ弱匿名性・弱中立性を含意するのは明らかであり，その意味で，弱匿名性・弱中立性は，通常の匿名性・通常の中立性よりも平等待遇の性質を弱めた条件である[7]。

次に，平等待遇基準とは別の観点からの条件を 2 つ提示する。1 つ目は，Tops-Only と呼ばれる条件である。

Tops-Only：任意の $P = (P_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ および任意の $P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ に対して，もし「任意の $j \in N$ に対して $t(P_j) = t(P'_j)$」ならば，$f(P) = f(P')$。

Tops-Only は，任意の 2 つのプロファイルを比較するとき，すべての個人の 1 位の選択肢が同一であれば同一の結果を出力するという条件である。すなわち，各個人の 1 位の選択肢のみを考慮して社会的な意思決定が行われる。この条件のもとで，選好の 2 位以下の選択肢は選出される結果に一切影響されないため，ルールが単純化される。ルールの複雑さに伴うコストを回避する際には有効となり得る条件

[7] 齋藤（2022）では，これらの条件よりもさらに弱めた条件を提示している。

である。現実の単記投票による意思決定の手続きは，すべて Tops-Only を満たしている。さらに，選択肢が２つのケースにおける任意のルールは，Tops-Only の性質を必ず満たしていることに注意する。

２つ目の条件は，単調性と呼ばれる条件である。この条件の描写のため，１つの表記を定義する：$i \in N$，$P_i \in \mathcal{P}$，$x \in X$ が与えられたとき，選好 $\tilde{P}(P_i\,;x) \in \mathcal{P}$ を，

$$t(\tilde{P}(P_i\,;x)) = x, \text{ かつ，任意の } y,\ z \in X \setminus \{x\} \text{ に対して } y\tilde{P}(P_i\,;x)z \Leftrightarrow yP_iz$$

を満たす選好とする。すなわち，$\tilde{P}(P_i\,;x)$ は，P_i において x を１位に変換し，その他の相対順位はすべて不変とした変換であり，「x を最も好きになる」という選好の変化を表現する。例えば $X = \{w, x, y, z\}$ として，選好 P_i における選択肢の好みの順位が $wxyz$（左に位置する選択肢ほど好ましい）となっているとき，$\tilde{P}(P_i\,;y)$ のもとでは $ywxz$ となる。定義より，$t(P_i) = x$ のとき，$\tilde{P}(P_i\,;x) = P_i$ である。次に，表記の簡単化のため，$P = (P_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$，$j \in N$，$P'_j \in \mathcal{P}$ が与えられたとき，プロファイル（$P'_j, (P_i)_{i \neq j}$）を（P'_j, P_{-j}）と書くことにする。このとき，単調性は以下のように描写される。

単調性：任意の $P = (P_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N$ および任意の $j \in N$ に対して，$f(P) = f(\tilde{P}(P_j\,;f(P)), P_{-j})$。

単調性は，P のときに選出される選択肢 $f(P)$ を誰かが最も好むようになるような「選好の変化」が生じる場合，$f(P)$ が選好の変化後のプロファイル（$\tilde{P}(P_j\,;f(P)), P_{-j}$）においても選出され続ける（すなわち，$f(\tilde{P}(P_j\,;f(P)), P_{-j}) = f(P)$）という条件である。$P$ から（$\tilde{P}(P_j\,;f(P))$，P_{-j}）への変化においては，選択肢 $f(P)$ の好みの順位が j 以外誰も変化せず，j のみ順位を１位に上昇させている。このように，あるプロファイルで選出される選択肢に対するネガティブな変化が一切なく，ポジティブな変化のみが生じるときに，その選択肢が選出され続けることは，民意を反映した意思決定がなされているとみなすこともできる。単調性は，社会的な意思決定の手続きとして自然な要請の１つと言えよう。

本稿では以上の条件を満たすルールを考察する。次節では，多数決ルールの一般化である相対多数ルールを導入する。

3. 相対多数ルール

ルール f は，

$$\text{任意の } P \in \mathcal{P}^N \text{ に対して } f(P) \in X_{\ell(P)}(P)$$

を満たすとき「相対多数ルール（Plurality Rule)」と呼ばれる。$X_{\ell(P)}(P)$ は最も多くの票を獲得する選択肢の集合と解釈されることに注意すると，相対多数ルールは，どのようなプロファイルに対してもそのプロファイルにおける相対多数の選択肢を選ぶルールであり，現実でもっともよく用いられている手続きの１つである。ただし，$|X_{\ell(P)}(P)| \geq 2$ のときは，相対多数の選択肢が複数存在するため，何らかのタイブレーク法によってそこから１つの選択肢のみ選出していることに注意する[8]。選択肢の数 m と構成員の人数 n が与えられたとき，タイブレークの方法に応じた複数の相対多数ルールが存在し，相対多数ルールのクラスが構成される。$PR(m, n)$ で（m, n）における相対多数ルールのクラスを表す。

相対多数ルールの定義から明らかに，以下の事実が成り立つ（証明略)。

事実 1：任意の（m, n）および任意の $f \in PR(m, n)$ に対して，f は弱匿名性・弱中立性・単調性を満たす。

したがって，どのような（m, n）でも，すべての相対多数ルールは個人間と選択肢間の平等待遇を部分的に両立し，選好のポジティブな変化に反応する。他方，ある（m, n）において，弱匿名性・弱中立性・単調性を同時に満たすルールは必ずしも相対多数ルールではないことに注意する。以下で，弱匿名性・弱中立性・単調性を満たす $f \notin PR(3, 5)$ の例を与える。

例 1：$m=3$，$n=5$ として $x \in X$ を与えておく。任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して，

$$f(P) = \begin{cases} x(P) & \text{if} \, |X_{\ell(P)}(P)| = 1 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。ただし，$\{x(P)\} \equiv X_{\ell(P)}(P)$ である。すなわち，相対多数の選択肢が 1 つのプロファイルではその選択肢を選出し，それ以外のプロファイルでは x を固定的に選出するルールである。これは，相対多数ルールと，常に固定された選択肢を選出する「固定選択肢ルール」の混合とみなすことができる。明らかに，$f \notin PR(3, 5)$ である。このルールが弱匿名性・弱中立性・単調性を満たすことを確認しよう。

弱匿名性：このルールは個人名に依存しないので明らかに通常の匿名性を満たし，したがって弱匿名性も満たす。

弱中立性：$|X_{\ell(P)}(P)| = 1$ となる P をとると，$f(P) = x(P)$。P から全単射 $\sigma: X \rightarrow X$ によって選択肢名を入れ替えたプロファイルを P' とすると，明らかに $|X_{\ell(P')}(P')| = 1$ かつ $x(P') = \sigma(x(P))$ である。よって $f(P') = x(P') = \sigma(x(P)) = \sigma(f(P))$ となり，弱中立性を満たす[9]。

単調性：まず，$|X_{\ell(P)}(P)| = 1$ となる P については明らかである。$n=5$ より，残りのケースは $|X_{\ell(P)}(P)| = 2$ となる P のみである。このとき，$\ell(P) = 2$ であることに注意する。定義より $f(P) = x$ となる。$x \in X_2(P)$ と $x \notin X_2(P)$ の場合に分けて示す。$x \in X_2(P)$ のとき，$t(P_j) \neq x$ となる $j \in N$ をとると，プロファイル $P' \equiv (\tilde{P}(P_j; x), P_{-j})$ のもとで $X_3(P') = \{x\}$ となるので，定義より $f(P') = x(P') = x$。他方，$x \notin X_2(P)$

8　通常，相対多数ルールとは社会選択対応の範疇で定義され，相対多数の選択肢が 2 つ以上あれば，それらを「すべて」選出する手続きのことを指す。それゆえ，本稿で提示された相対多数ルールは，正確には「タイブレークを伴う相対多数ルール」と呼ぶべきであるが，表現の簡略化のため，相対多数ルールという語でタイブレークを伴う相対多数ルールを表すこととする。

9　このルールは，$|X_{\ell(P)}(P)| = 2$ となる P で x が「特別扱い」されているため，通常の中立性を満たさない。

のとき，$n=5$ かつ $|X_2(P)|=2$ より $\{x\}=X_1(P)$ を意味する。$t(P_j)\neq x$ となる $j\in N$ をとると，プロファイル $P''\equiv(\tilde{P}(P_j;x),P_{-j})$ のもとで $|X_{\ell(p'')}(P'')|=2$ となるため，定義より $f(P'')=x$。以上から単調性が示された。

例 1 のルールは，弱匿名性のみならず通常の匿名性をも満たしていたことに注意する。さらに，Tops-Only を満たすことも明らかである。したがって，一般的には，ルールに通常の匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を課しても相対多数ルールには至らないことに注意する。この事実は，選択肢の数を 1 つ増やすことによる先行研究との明確な差異となる。次の例は，弱匿名性・通常の中立性・Tops-Only・単調性のもとでも，必ずしも相対多数ルールとは一致しないことを示す。

例 2：$m=3$，$n=5$ として $i^*\in N$ を与えておく。任意の $P=(P_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$ に対して，

$$f(P)=\begin{cases} x(P) & \text{if} \, |X_{\ell(P)}(P)|=1 \\ t(P_{i^*}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。ただし，$\{x(P)\}\equiv X_{\ell(P)}(P)$ である。このルールは，相対多数の選択肢が 1 つのプロファイルではその選択肢を選出し，それ以外のプロファイルでは常に i^* の 1 位の選択肢を選出するルールである。これは，相対多数ルールと，いわゆる「(i^* が独裁者の）独裁ルール」の混合とみなすことができる。明らかに，$f\notin PR(3,5)$ である。このルールは弱匿名性・通常の中立性・Tops-Only・単調性を満たすことが例 1 とほぼ同様に確認できる（証明略)。

前述のように，通常の匿名性と通常の中立性は Moulin の両立条件を満たす（m, n）のときのみ両立するが，実は $m=3$，$n=5$ はその両立条件を満たしている[10]。したがって，(3, 5）において，通常の匿名性・通常の中立性に加えて Tops-Only・単調性を満たすルールは相対多数ルールのクラスに属すると考えることができるかもしれない。しかし，この考えは否定され，(3, 5）において通常の匿名性・通常の中立性・Tops-Only・単調性をすべて満たすルール自体がそもそも存在しない。より一般に，$m\geq 3$ のとき，仮に Moulin の両立条件を満たす n であっても，匿名性と中立性のもとで Tops-Only と単調性を同時に満たすルールは存在しないことが証明されている。すなわち，下記の事実が成り立つ[11]。

事実 2［Saitoh（2022, Corollary 2)］：匿名性と中立性が両立する（m, n）（ただし，$m\geq 3$）のもとで，匿名性・中立性・Tops-Only・単調性を同時に満たすルールは存在しない。

10　両立条件の詳細は，例えば Moulin（1983）あるいは齋藤（2022）などを参照。

11　事実 2 とは対照的に，意思決定の手続きとして社会選択対応を採用する場合では，相対多数の選択肢を「すべて」選出する手続き（いわゆる，「通常の意味での」相対多数ルール（脚注 8 参照)）が匿名性・中立性・Tops-Only・単調性を同時に満たす。Kelly and Qi（2016）は，社会選択対応を採用して，単調性を弱めて特徴付けを行っている。

証明は Saitoh（2022）を参照。この事実により，Tops-Only と単調性を採用する場合は，どのような n であっても例外なく匿名性と中立性の少なくとも一方を緩和する必要がある。次節では，$m=3$ において，緩和された両条件および Tops-Only・単調性を満たすルールを分析する。

4. $m=3$ のケースの分析

例 1 と例 2 のルールで相対多数ルールと異なる選出がなされるのは，いずれも相対多数の選択肢が 2 つ存在するプロファイル（すなわち，$|X_{\ell(P)}(P)|=2$ となる P）のときのみであったことに注意する。さらに，$n=5$ から，そのようなプロファイルでは，相対多数の選択肢は 2 票ずつ獲得しているので，残りの選択肢は 1 票（すなわち，「最多得票数から 1 票少ない票数」）を獲得している。一般的に，このような票数の構造を持つプロファイルは，ある $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ によって $n=3k-1$ と表現されるとき存在する[12]。実際，$n=3k-1=k+k+(k-1)$ と分解できるので，2 つの選択肢が k 票獲得し，残りの選択肢が 1 票少ない $k-1$ 票獲得するというプロファイルがとれる。そのようなプロファイルを「k-k-$k-1$ プロファイル」と呼ぶことにする。以降では，k-k-$k-1$ プロファイルが存在する限り，例 1 や例 2 のような非相対多数のルールを排除することはできないことが示される。次に，n がある $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ によって $n=3k-1$ と表現される場合とされない場合に分けて結果を与える。

4-1. 任意の $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ に対して $n\neq 3k-1$ となるとき

どのような $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ に対しても $n\neq 3k-1$ となるときは，上述の相対多数を妨げる k-k-$k-1$ プロファイルが存在しなくなり，弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性のもとで，例 1 や例 2 のようなルールが排除される。すなわち，下記の定理が成立する。

定理 1：任意の $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ に対して $n\neq 3k-1$ とする。ルール f が弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすならば，$f\in PR(3,n)$ である。

証明は 6 節で与えられる。したがって，$n=3,4,6,7,9,\ldots$のときは，緩和条件を強めることなく相対多数ルールを導き出すことができる。

注意 1：以下で示すように，定理 1 の 4 条件のうち 1 つでも欠けると相対多数ルールは導かれない。

- 弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・¬ 単調性：タイブレークを伴う相対少数ルール（1 票以上獲得する選択肢の中で最も票が少ない選択肢を，タイブレークを伴い選出するルール）
- 弱匿名性・弱中立性・¬Tops-Only・単調性：タイブレークを伴うボルダルール（ボルダスコアが最も高い選択肢を，タイブレークを伴い選出するルール）

---

[12] $\mathbb{N}$ は自然数の集合である。

- 弱匿名性・¬ 弱中立性・Tops-Only・単調性：固定選択肢ルール（常に同じ選択肢を選出するルール）
- ¬ 弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性：独裁ルール（常に特定の個人の1位の選択肢を選出するルール）

4-2. ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $n=3k-1$ となるとき

ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $n=3k-1$ となるときは k-k-$k-1$ プロファイルが存在し，例1や例2のように弱匿名性と弱中立性の一方を強めても非相対多数による選出ルールが排除されない。しかし，非相対多数によるルールのクラスはそれほど広くなく，通常の匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすルールがもし相対多数ルールでないならば，そのルールは本質的には例1のタイプのルールのクラスに属することが示される。また，$k=2$ のときは，弱匿名性・中立性・Tops-Only・単調性を満たすルールがもし相対多数ルールでないならば，そのルールは例2のルールを特殊ケースとして含むあるルールのクラスに属することが示される。これらの結果を述べるために，次に例1と例2のルールをそれぞれ一般化して，「固定選択肢ルールとの混合ルール」と，「独裁ルールとの混合ルール」と呼ばれる2つのタイプのルールを導入する。

4-2-1. 固定選択肢ルールとの混合ルール

まず例1のルールを，ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $n=3k-1$ となる n について一般化する：$x \in X$ が与えられたとき，ルール f が任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して，

$$\begin{cases} f(P)=x & \text{if} \, |X_k(P)|=2, \\ f(P) \in X_{\ell(P)}(P) & \text{otherwise} \end{cases}$$

を満たすとする。$k=2$（すなわち，$n=5$）のとき，このルールは例1のルールと本質的に等しい。$|X_k(P)|=2$ は $|X_{k-1}(P)|=1$ を含意することに注意すると，このルールは，k-k-$k-1$ プロファイルに限り，相対多数によらず事前に定められた選択肢を固定的に選出して，その他のプロファイルでは相対多数の選択肢を選出するルールである。このルールを，「固定選択肢ルールとの混合ルール」と呼ぶことにする。固定的に選出される選択肢や相対多数が選出される際のタイブレークの方法に応じて複数の混合ルールが存在し，混合ルールのクラスが構成される。$(m, n)=(3, 3k-1)$ における，固定選択肢ルールとの混合ルールのクラスを，$Mix(3, 3k-1; X)$ と書く。

4-2-2. 独裁ルールとの混合ルール

次に，$k=2$ として，例2のルールを一般化したルールを導入する[13]。まず，2-2-1 プロファイル（k-k-$k-1$ プロファイル）の集合を $\mathcal{P}_{221}$ とおくと，$\mathcal{P}_{221}=\{P' \in \mathcal{P}^N : |X_2(P')|=2\}$ である。このとき，$i^* \in N$ および下記の条件（C1），（C2）を満たす $\mathcal{P}^N(i^*) \subseteq \mathcal{P}_{221}$ を与えておき，任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して，

[13] 例2のルールは $k>2$ のケースにも拡張できるが，主要な結果では取り扱わないため $k=2$ に限定する。

$$\begin{cases} f(P)=t(P_{i^*}) & \text{if } P\in\mathcal{P}^N(i^*) \\ f(P)\in X_{\ell(P)}(P) & \text{otherwise} \end{cases}$$

を満たすとする。ここで，$\mathcal{P}^N(i^*)$ は，

（C1）任意の $P\in\mathcal{P}^N(i^*)$，任意の $j\in N$，および，$t(P_j')=t(P_{i^*})$を満たす任意の $P_j'\in\mathcal{P}$ に対して，もし（P_j', P_{-j}）$\in\mathcal{P}_{221}$ ならば，$(P_j', P_{-j})\in\mathcal{P}^N(i^*)$

（C2）任意の $P\in\mathcal{P}_{221}\setminus\mathcal{P}^N(i^*)$，任意の $j\in N$，および，$t(P_j')=t(P_{i^*})$ を満たす任意の $P_j'\in\mathcal{P}$ に対して，もし（P_j', P_{-j}）$\in\mathcal{P}_{221}$ ならば，$(P_j', P_{-j})\notin\mathcal{P}^N(i^*)$

を満たす集合である。条件（C1）は，$\mathcal{P}^N(i^*)$ に属する 1 つの 2–2–1 プロファイルから，誰かが i^*の 1 位の選択肢を最も好むように選好を変化[14] させたとき，選好変化後のプロファイルもまた 2–2–1 プロファイルである場合は $\mathcal{P}^N(i^*)$ に属することを表している。条件（C2）は，集合 $\mathcal{P}_{221}\setminus\mathcal{P}^N(i^*)$ についても，2–2–1 プロファイルの（C1）と同様の変換に関して「閉じている」ことを表す。この定義を満たすような $i^*\in N$ および $\mathcal{P}^N(i^*)$ が存在するとき，そのルールを「独裁ルールとの混合ルール」と呼ぶ。$(m, n)=(3, 5)$ における，そのような混合ルールのクラスを $Mix(3, 5; N)$ と書くことにする。

このルールは，$\mathcal{P}^N(i^*)$ に属する 2–2–1 プロファイルのときに i^*が決定権を持ち，相対多数によらず i^*の 1 位の選択肢を選出する。一方，その他のプロファイルでは，相対多数の選択肢を選出するルールである[15]。$Mix(3, n; X)$ のクラスとは異なり，特定の 2–2–1 プロファイルについては i^*の 1 位の選択肢が選ばれず，相対多数に従うこともあり得る。条件（C1），（C2）により，この混合ルールは矛盾なく定義される。$\mathcal{P}^N(i^*)=\mathcal{P}_{221}$ のとき，このルールは例 2 のルールと一致する。以下は，$\mathcal{P}^N(i^*)\neq\mathcal{P}_{221}$ となる $\mathcal{P}^N(i^*)$ の例である。

例 3：$i^*=1$ として，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^N(1)\equiv\{P\in\mathcal{P}^N\colon & \text{(i)}\,[\,\{t(P_1)\}=X_1(P) \text{ and } t(P_2)=t(P_3)\neq t(P_4)=t(P_5)\,]\\ & \vee\,\text{(ii)}\,[\,|N(t(P_1), P)|=2 \text{ and } (\forall h\in\{4,5\})\ t(P_h)\neq t(P_2)=t(P_3)\,]\\ & \vee\,\text{(iii)}\,[\,|N(t(P_1), P)|=2 \text{ and } (\forall h\in\{2,3\})\ t(P_h)\neq t(P_4)=t(P_5)\,]\}\end{aligned}$$

とする。$\mathcal{P}^N(1)$が条件（C1），（C2）を満たすことを確認しよう。

（C1）：$P\in\mathcal{P}^N(1)$をとり，$j\in N$ に対して $t(P_j')=t(P_1)$を満たす $P_j'\in\mathcal{P}$ をとり，$P'\equiv(P_j', P_{-j})$ とおく。まず，P が（i）の性質を満たすとする。このとき，$j=1$ の場合は明らか。もし $j\neq 1$ ならば，$P'\in\mathcal{P}_{221}$ となり，さらに（ii）または（iii）の性質を満たすので $P'\in\mathcal{P}^N(1)$。次に，P が（ii）または（iii）の性質を満たすとする。$j\in N(t(P_1), P)$ の場合は明らか。もし $j\notin N(t(P_1), P)$ ならば，$t(P_1)\in X_3(P')$ から $P'\notin\mathcal{P}_{221}$ となるため前提を満たさない。以上から $\mathcal{P}^N(1)$ が条件（C1）を満たすことが確認できた。

---

[14] この選好変化は，単調性の定義で与えた $\tilde{P}(\cdot\,;\cdot)$ に基づく変換である必要はなく，2 位以下の相対順位が入れ替わっていてもよい。

[15] $\mathcal{P}^N(i^*)$ に属するプロファイル P であっても，$t(P_{i^*})\in X_2(P)$ となることもあり得る。この場合，定義上は i^* の決定権に基づいて $t(P_{i^*})$ が選出されるものの，この選択肢は結果的に相対多数となっている。

(C2)：$P \in \mathcal{P}_{221} \setminus \mathcal{P}^N(1)$ とする。$j \in N$ に対して $t(P_j') = t(P_1)$を満たす $P_j' \in \mathcal{P}$ をとり，$P' \equiv (P_j', P_{-j})$ とおく。2つの場合に分ける。

ケース1 ［$\{t(P_1)\} = X_1(P)$のとき］：このとき，$t(P_2) = t(P_4) \neq t(P_3) = t(P_5)$か，$t(P_2) = t(P_5) \neq t(P_3) = t(P_4)$のいずれか一方が成り立つ。$j=1$ の場合は明らかに $P' \notin \mathcal{P}^N(1)$。もし $j \neq 1$ ならば $|N(t(P_1), P')| = 2$ となり，(a) $h \in \{3, 5\}$ に対して $t(P_h) \neq t(P_2) = t(P_4)$，(b) $h \in \{2, 4\}$ に対して $t(P_h) \neq t(P_3) = t(P_5)$，(c) $h \in \{3, 4\}$ に対して $t(P_h) \neq t(P_2) = t(P_5)$，(d) $h \in \{2, 5\}$ に対して $t(P_h) \neq t(P_3) = t(P_4)$ のいずれか1つが成り立つ。しかし，(a)－(d)いずれも (i)－(iii) のどの条件も満たされず $P' \notin \mathcal{P}^N(1)$。

ケース2 ［$t(P_1) \in X_2(P)$ のとき］：このとき，(A) $t(P_2) = t(P_4)$，(B) $t(P_3) = t(P_5)$，(C) $t(P_2) = t(P_5)$，(D) $t(P_3) = t(P_4)$ のいずれか1つが成り立つ。P' が2-2-1プロファイルとなるのは $j \in N(t(P_1), P)$ のときに限られるので，P' のもとでは $|N(t(P_1), P')| = 2$ かつ（A）－（D）のいずれか1つが成り立つ。どの場合でも (i)－(iii) と異なるので $P' \notin \mathcal{P}^N(1)$。

よって，$\mathcal{P}^N(1)$は条件（C2）を満たす。$\mathcal{P}^N(1) \neq \mathcal{P}_{221}$ より，$\mathcal{P}^N(1)$ のもとでは個人1が決定権を持たない2-2-1プロファイルも存在する。このルールが弱匿名性・中立性・Tops-Only・単調性を満たすことは例2のルールとほぼ同様に確認できる。

4-2-3. 結果

以下の定理は，$n = 3k - 1$ のケースの主要な結果である。

定理2：ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $n = 3k - 1$ とする。

(a)ルール f が匿名性･弱中立性･ Tops-Only ･単調性を満たすならば, $f \in PR(3, 3k-1) \cup Mix(3, 3k-1; X)$ である。

(b) $k = 2$（すなわち，$n = 5$）のとき，ルール f が弱匿名性・中立性・Tops-Only・単調性を満たすならば，$f \in PR(3, 5) \cup Mix(3, 5; N)$ である。

証明は6節で与えられる。$n = 3k - 1$ と表現されるとき，通常の匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすルールは相対多数ルールか, 固定選択肢ルールとの混合ルールとなる。また, $n = 5$ のとき，弱匿名性・通常の中立性・Tops-Only・単調性を満たすルールは相対多数ルールか，独裁ルールとの混合ルールとなる。(b) における $k > 2$ のときの分析は今後の課題として残す。

5. おわりに

本稿では，匿名性と中立性の1つの緩和条件を与え，Tops-Only と単調性を満たすルールを考察した。選択肢が2つのケースを分析した先行研究と対照的に，選択肢が3つのとき，弱匿名性・弱中立性・

Tops-Only・単調性のもとでは，構成員の人数が特定の条件を満たすときのみ相対多数ルールが導かれ，その条件を満たさないときは，相対多数ルールとは異なるルールとなり得ることが示された。主要な結果として，混合ルールという新たなルールのクラスを導入し，緩和条件の一方を強めた場合は，相対多数ルールのクラスか混合ルールのクラスに属することが示された。本節では，得られた結果についていくつか注意を述べる。

まず，本研究では主に選択肢が 3 つのケースを扱ったが，選択肢が 4 つ以上になると k-k-$k-1$ プロファイルと同等の問題がさらに多くのプロファイルで生じる。例えば $m=5$ のときは，$n=3k-1$ に加えて，$n=4k-1$ あるいは $n=5k-1$ のときも「相対多数でない選択肢が，最多得票数より 1 票少ないプロファイル」が存在し，相対多数による選出を妨げることが確認される。4 つ以上のケースの分析は今後の課題として残す。

次に，混合ルールについて，このルールは確かに相対多数ルールとは異なるが，相対多数ルールから深刻に乖離したルールとは必ずしも言えない。実際，$n=3k-1$ において，2 つの選択肢が k 票獲得し，残りが $k-1$ 票獲得する状況（すなわち，k-k-$k-1$ プロファイル）は，3 つの選択肢が最も拮抗している状態であり，すべてがほぼ同票数とみなすこともできる。混合ルールは，k-k-$k-1$ プロファイルを「3 つの選択肢が実質的に同順位」とみなし，何らかのタイブレーク法で選出するルールととらえることができる。その意味で，混合ルールは「ほぼ」相対多数ルールであると解釈することもできる[16]。

最後に，本研究との関連研究として，Saitoh(2022) を挙げる。そこでは，得票数における匿名性・得票数における中立性と呼ばれる，弱匿名性や弱中立性とは別のタイプの緩和条件を提示している。主要な結果として，ETCD 条件と呼ばれる，得票数における匿名性および得票数における中立性を両方含意する条件を与えて相対多数ルールのクラスの特徴付けを行っている。ETCD 条件は，プロファイルから導出される投票分布の形状に基づき，選出のある種の対称性を課す条件であり，匿名性・中立性のような個人名や選択肢名の名前の入れ替えによる選出の不変性については何も要求していない。他方，弱匿名性や弱中立性は，相対多数の選択肢が 2 つ以上となるプロファイルにおいて何も選出の対称性を課していないことから，これらの条件は独立である。本稿で扱った弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を前提として，$n=3k-1$ のときでも相対多数ルールのみを導くような，ETCD 条件とは別の観点からの自然な条件の特定は，今後の課題である。

6. 証明

6-1. 準備

本節では，定理 1 と 2 の証明で用いられるいくつかの結果を与える。まず，以降の証明で用いられる表記を導入する。$P=(P_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$, $j, j'\in N$, および $P'_j, P'_{j'}\in\mathcal{P}$ が与えられたとき，プロファイル（P'_j, $P'_{j'}$, $(P_i)_{i\neq j, j'}$）を $(P'_j, P'_{j'}, P_{-\{j,j'\}})$ と書く。また，与えられた $P\in\mathcal{P}^N$ に対して，もし $|X_{\ell(P)}(P)|=1$ ならば，

16　この解釈は，k が大きいほど 1 票の差が相対的に小さくなるため，より意味を持つ。

$x(P)$で$X_{\ell(P)}(P)$の要素を表す（すなわち，$\{x(P)\}=X_{\ell(P)}(P)$）。

補題 1：$m\geq 3, n\geq 3$とする。ルールfが弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすとき，$|X_{\ell(P)}(P)|=1$となる任意の$P\in\mathcal{P}^N$に対して，$f(P)\in\bigcup_{\ell\geq 1}X_\ell(P)$。

補題 1 の証明：$|X_{\ell(P)}(P)|=1$かつ$f(P)\equiv x\in X_0(P)$となる$P=(P_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$が存在したとすると，$1\leq|\bigcup_{\ell\geq 1}X_\ell(P)|\leq m-1$である。$y\in\arg\min_{z\in\bigcup_{\ell\geq 1}X_\ell(P)}|N(z,P)|$を任意にとり，$P'=(P_i')_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$を，

$$P_j'=\begin{cases}\tilde{P}(P_j\,;x) & \text{if } j\in N(y,P)\\ P_j & \text{otherwise}\end{cases}$$

とする。$j\in N(y,P)$を任意にとると，単調性から$f(P_j',P_{-j})=x$。さらに$j'\in N(y,P)\setminus\{j\}$を任意にとると（ただし，そのような$j'$が存在する場合），再び単調性から$f(P_{j'}',P_j',P_{-\{j,j'\}})=f(P_j',P_{-j})=x$。この操作を続けることで，$f(P')=x$を得る。いま，全単射$\sigma(x)=y,\sigma(y)=x,(\forall z\neq x,y)\sigma(z)=z$によって，「任意の$i\in N$，任意の$z',z''\in X$に対して，$z'P_j'z''\Leftrightarrow\sigma(z')P_j''\sigma(z'')$」となるように$P''$を構成する。明らかに$|X_{\ell(P'')}(P'')|=1$となるので，弱中立性より$f(P'')=\sigma(f(P'))=y$である。ここで，任意の$j\in N$に対して$t(P_j)=t(P_j'')$であることに注意すると，Tops-Onlyから$x=f(P)=f(P'')=y$となり矛盾。■

補題 2：$m\geq 3, n\geq 3$とする。ルールfが弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすとき，$|X_{\ell(P)}(P)|=1$となる任意の$P\in\mathcal{P}^N$に対して，$f(P)=x(P)$。

補題 2 の証明：$|X_{\ell(P)}(P)|=1$かつ$f(P)\equiv x\neq x(P)$となる$P\in\mathcal{P}^N$が存在したとする。補題1と$x\neq x(P)$より，ある$1\leq\ell<\ell(P)$に対して$x\in X_\ell(P)$となる。$N'\subset N(x(P),P)$を，$|N'|=\ell(P)-\ell$となるように任意にとる[17]。$P'=(P_i')_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$を，

$$P_j'=\begin{cases}\tilde{P}(P_j\,;x) & \text{if } j\in N'\\ P_j & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定義すると，補題1で用いた手法と全く同様に，単調性から$f(P')=x$となる。このとき，P'の定義より，$X_{\ell(P')}(P')=\{x\},x(P)\in X_\ell(P')$，かつ，$\ell(P')=\ell(P)$であることに注意する。いま，置換$\pi:N\to N$を，

(a) 任意の$i\in N(x(P),P)\setminus N'$に対して，$\pi(i)\in N(x,P)$，

(b) 任意の$i\in N(x,P)$に対して，$\pi(i)\in N(x(P),P)\setminus N'$，

(c) 任意の$i\notin[N(x(P),P)\setminus N']\cup N(x,P)$に対して，$\pi(i)=i$

となるように作る。$|N(x(P),P)\setminus N'|=|N(x,P)|=\ell$より，そのような$\pi$は構成可能である。$P'$から$\pi$

[17] $|N(x(P),P)|=\ell(P)>\ell$より，そのようなN'は必ずとれる。

によって個人名を入れ替えたプロファイルを P'' とすると，$|X_{\ell(P'')}(P'')|=1$ より弱匿名性から $f(P'')=f(P')=x$。次に，P'' から全単射

$$\sigma(x)=x(P), \sigma(x(P))=x, (\forall z\neq x, x(P))\sigma(z)=z$$

によって選択肢名を入れ替えたプロファイルを P''' とすると，$|X_{\ell(P''')}(P''')|=1$ より弱中立性から $f(P''')=\sigma(f(P''))=x(P)$。ここで，$P'''$ の定義より，任意の $j\in N$ に対して $t(P_j)=t(P_j''')$ であることに注意すると，Tops-Only から $f(P)=f(P''')$。しかし，これは $x=x(P)$ を意味するので矛盾。■

補題 3：$m=3$ とする。ルール f が弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすとする。このとき，任意の $P\in\mathcal{P}^N$ に対して，$f(P)\in\bigcup_{\ell\geq 1}X_\ell(P)$。

補題 3 の証明：$f(P)\equiv x\in X_0(P)$ となる $P\in\mathcal{P}^N$ が存在したとする。$m=3$ と補題 1 より，$|X_{\ell(P)}(P)|=2$ でなければならない。$X_{\ell(P)}(P)=\bigcup_{\ell\geq 1}X_\ell(P)$ より $2\ell(P)=n\geq 3$ となるので，$\ell(P)\geq 2$ を得る。$X_{\ell(P)}(P)\equiv\{y, z\}$ とおく。$j\in N(y, P)$ を任意にとり，$P'\equiv(\tilde{P}(P_j; x), P_{-j})$ を定義すると，単調性から $f(P')=x$。ここで，P' のもとで $\ell(P')=\ell(P)\geq 2$ かつ $x\in X_1(P')$（すなわち，$x\notin X_{\ell(P')}(P')$）かつ $|X_{\ell(P')}(P')|=1$ となるので，補題 2 に反する。■

6-2. 定理 1 の証明

本節では，4 節で与えられた下記の定理 1 を証明する。

定理 1：任意の $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ に対して $n\neq 3k-1$ とする。ルール f が弱匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすならば，$f\in PR(3, n)$ である。

定理 1 の証明：補題 2 より，$|X_{\ell(P)}(P)|=1$ となる $P\in\mathcal{P}^N$ に対しては $f(P)=x(P)$ となる。また，$|X_{\ell(P)}(P)|=3$ となる $P\in\mathcal{P}^N$ に対しては明らかに $f(P)\in X_{\ell(P)}(P)$ であるので，$|X_{\ell(P)}(P)|=2$ となる $P\in\mathcal{P}^N$ に対して $f(P)\equiv x\in X_{\ell(P)}(P)$ を示せば十分である。背理法により，$x\notin X_{\ell(P)}(P)$ を仮定する。また，$X_{\ell(P)}(P)=\{y, z\}$ とおく。$x\in X_\ell(P)$ とすると，$\ell<\ell(P)$ かつ補題 3 より $\ell\geq 1$ である。よって，$\ell(P)\geq 2$ である。ここで，ℓ と $\ell(P)$ の関係について，さらに以下の主張が成り立つ。

主張 1：$\ell<\ell(P)-1$ が成り立つ。

主張 1 の証明：$\ell<\ell(P)$ より，$\ell\leq\ell(P)-1$ である。また，x, y, z がそれぞれ獲得する票数を合計すると n に等しくなるので，$n=2\ell(P)+\ell$ となることに注意する。ここで，仮に $\ell=\ell(P)-1$ が成立したとすると，$n=3\ell(P)-1$ となるが，$\ell(P)\geq 2$ より定理 1 の仮定（任意の $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ に対して $n\neq 3k-1$）に反する。よって，$\ell<\ell(P)-1$。■

この主張を用いて，定理 1 の証明を進める。$j \in N(y, P)$を任意にとり，$P' \equiv (\tilde{P}(P_j; x), P_{-j})$を定義すると，単調性から$f(P') = x$。ここで，$P'$ のもとで $|N(x, P')| = \ell + 1$, $|N(y, P')| = \ell(P) - 1$, $|N(z, P')| = \ell(P) = \ell(P')$ であるが，主張 1 より，$\ell + 1 < \ell(P)$となることに注意すると，$x \notin X_{\ell(P')}(P')$ かつ $|X_{\ell(P')}(P')| = 1$が成り立つ。これは，補題 2 に反する。以上から定理 1 が示された。■

6-3. 定理 2 の証明

本節では，下記の定理 2 を証明する。

定理 2：ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して $n = 3k - 1$ とする。

(a) ルール f が匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすならば，$f \in PR(3, 3k-1) \cup Mix(3, 3k-1; X)$ である。

(b) $k = 2$（すなわち，$n = 5$）とする。ルール f が弱匿名性・中立性・Tops-Only・単調性を満たすならば，$f \in PR(3, 5) \cup Mix(3, 5; N)$である。

定理 2(a)の証明：$m = 3$ かつ $n = 3k - 1 (k \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$として，$f$ が匿名性・弱中立性・Tops-Only・単調性を満たすとする。証明は（1）～(3) の手順で行われる：(1)$|X_{\ell(P)}(P)| \neq 2$ または $\ell(P) \neq k$ を満たす任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して$f(P) \in X_{\ell(P)}(P)$となることを示す。(2) もし $|X_{\ell(P)}(P)| = 2$ かつ $\ell(P) = k$ を満たすある $P \in \mathcal{P}^N$ に対して$f(P) \notin X_{\ell(P)}(P)$となるならば，$|X_{\ell(P')}(P')| = 2$ かつ $\ell(P') = k$ を満たす任意の $P' \in \mathcal{P}^N$ に対して$f(P') = f(P)$となること（すなわち，任意の k-k-$k-1$ プロファイルにおいて，固定選択肢$f(P)$が選出され，(1)と合わせてfは固定選択肢ルールとの混合ルールとなること）を示す。(3)（2）の前提となるプロファイルが存在しない場合，すなわち，$|X_{\ell(P)}(P)| = 2$ かつ $\ell(P) = k$ を満たす任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して$f(P) \in X_{\ell(P)}(P)$となるならば，(1) と合わせて$f \in PR(3, 3k-1)$意味するので証明が完了する。したがって，実質的には（1）と（2）のみで十分である。以降では，ステップ 1 で（1）を示し，ステップ 2 で（2）を示す。

ステップ 1：$|X_{\ell(P)}(P)| \neq 2$ または $\ell(P) \neq k$ を満たす任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して$f(P) \in X_{\ell(P)}(P)$となる。

ステップ 1 の証明：$|X_{\ell(P)}(P)| = 1$ となる $P \in \mathcal{P}^N$ については補題 2 より従う。$n = 3k - 1$ より $|X_{\ell(P)}(\mathrm{P})| = 3$ となる $P \in \mathcal{P}^N$ は存在しない。次に，$\ell(P) \neq k$ となる $P \in \mathcal{P}^N$ をとり，$f(P) \equiv x$, $X \setminus \{x\} \equiv \{y, z\}$とおく。このとき，$\ell(P) > k$ が成り立つ。実際，仮に $\ell(P) < k$ とすると $\ell(P) \leq k - 1$ より，任意の $z' \in X$ に対して $|N(z', P)| \leq \ell(P) \leq k - 1$。よって，$n = |N(x, P)| + |N(y, P)| + |N(z, P)| \leq 3(k-1) < 3k - 1 = n$ となり矛盾。よって $\ell(P) > k$。さて，$|X_{\ell(P)}(P)| = 1$ のときは補題 2 より $\{x\} = X_{\ell(P)}(P)$が従う。$|X_{\ell(P)}(P)| = 3$ は生じないので，残りは $\ell(P) > k$ かつ $|X_{\ell(P)}(P)| = 2$ のときに $x \in X_{\ell(P)}(P)$となることを示せばよい。いま，結論を否定して $x \notin X_{\ell(P)}(P)$とする。すなわち，$X_{\ell(P)}(P) = \{y, z\}$，$X_{n-2\ell(P)}(P) = \{x\}$，かつ，$\ell(P) > n - 2\ell(P) \geq 1$。最後の不等号は，補題 3 より従う。$j \in N(y, P)$ を任意にとり，$P' \equiv (\tilde{P}(P_j; x), P_{-j})$ を定義すると，

単調性から $f(P')=x$。ここで，P' のもとで $|N(x, P')|=n-2\ell(P)+1$，$|N(y, P')|=\ell(P)-1$，$|N(z, P')|=\ell(P)$であるが，$\ell(P)>k$ と $n=3k-1$ より $n-2\ell(P)+1<\ell(P)$となることに注意すると，$\ell(P')=\ell(P)$である。よって，$x\notin X_{\ell(P')}(P')$かつ $|X_{\ell(P')}(P')|=1$ が成り立ち，補題 2 に反する。以上からステップ 1 が示された。

ステップ 2：$|X_{\ell(P)}(P)|=2$ かつ $\ell(P)=k$ を満たすある $P\in\mathcal{P}^N$ に対して $f(P)\notin X_{\ell(P)}(P)$ とする。このとき，$|X_{\ell(P')}(P')|=2$ かつ $\ell(P')=k$ を満たす任意の $P'\in\mathcal{P}^N$ に対して $f(P')=f(P)$ となる。

ステップ 2 の証明：$|X_{\ell(P)}(P)|=2$ かつ $\ell(P)=k$ を満たすある $P\in\mathcal{P}^N$ に対して $f(P)\equiv x\notin X_k(P)\equiv\{y, z\}$とする。$n=3k-1$ より，$X_{k-1}(P)=\{x\}$である。いま，$|X_{\ell(P')}(P')|=2$ かつ $\ell(P')=k$ を満たす $P'=(P'_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$ を 1 つ与える。$X_{k-1}(P')$ の選択肢に応じて，2 つの場合に分けて示す。

ステップ 2 のケース 1［$X_{k-1}(P')=\{x\}$ のとき］：$X_k(P')=\{y, z\}$ である。置換 $\pi: N\rightarrow N$ を，

（A）任意の $i\in N(x, P)$ に対して，$\pi(i)\in N(x, P')$，

（B）任意の $i\in N(y, P)$ に対して，$\pi(i)\in N(y, P')$，

（C）任意の $i\in N(z, P)$ に対して，$\pi(i)\in N(z, P')$

となるように構成して，この π で P の個人名を入れ替えたプロファイルを $P''=(P''_i)_{i\in N}\in\mathcal{P}^N$ とおくと，匿名性より $f(P'')=x$。P''の定義より，任意の $j\in N$ に対して $t(P''_i)=t(P'_j)$ であることに注意すると，Tops-Only から $x=f(P'')=f(P')$。

ステップ 2 のケース 2［$x\in X_k(P')$ のとき］：$X_k(P')=\{x, y\}$ かつ $X_{k-1}(P')=\{z\}$ とおく[18]。$j\in N(x, P')$ を任意にとり，$P''\equiv(\tilde{P}(P'_j; z), P'_{-j})$ とすると，$X_{k-1}(P'')=\{x\}, X_k(P'')=\{y, z\}$である。よって，ケース 1 に当てはめて，$f(P'')=x$ を得る。ここで，$P'''\equiv(\tilde{P}(\tilde{P}(P'_j; z); x), P'_{-j})$とおくと，単調性より $f(P''')=x$。P''' の定義より，任意の $i\in N$ に対して $t(P'''_i)=t(P'_i)$であることに注意すると，Tops-Only から $x=f(P''')=f(P')$。

以上からステップ 2 が示された。ステップ 1 と 2 より，定理 2（a）が示された。■

定理 2(b)の証明の前に 1 つの補題を与える。

補題 4：$m\geq 3$，$n\geq 3$ とする。ルール f が中立性・Tops-Only を満たすとき，任意の P，$P'\in\mathcal{P}^N$ および任意の全単射 $\sigma: X\rightarrow X$ に対して，もしすべての $x\in X$ に対して $N(x, P)=N(\sigma(x), P')$ ならば，$f(P')=\sigma(f(P))$ となる。

---

[18] $X_k(P')=\{x, z\}$ かつ $X_{k-1}(P')=\{y\}$ のときも同様である。

補題4の証明：P, $P' \in \mathcal{P}^N$ と全単射 $\sigma: X \to X$ を1つ与え，すべての $x \in X$ に対して $N(x, P) = N(\sigma(x), P')$ とする。$P^\sigma \in \mathcal{P}^N$ を，任意の $j \in N$，任意の x，$y \in X$ に対して，$xP_jy \Leftrightarrow \sigma(x)P^\sigma_j\sigma(y)$ を満たすプロファイルとすると，中立性より $f(P^\sigma) = \sigma(f(P))$。一方，任意の $j \in N$ に対して $t(P^\sigma_j) = \sigma(t(P_j)) = t(P'_j)$ となるので，Tops-Only から $f(P^\sigma) = f(P')$。以上から，$f(P') = \sigma(f(P))$ を得る。■

定理2(b)の証明：$m = 3$ かつ $n = 5(k = 2)$ として，f が弱匿名性・中立性・Tops-Only・単調性を満たすとする。証明は，定理2(a)の証明とほぼ同様の方針で（1），（2）の手順で行われる：(1) $|X_{\ell(P)}(P)| \neq 2$ または $\ell(P) \neq k = 2$ を満たす任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して $f(P) \in X_{\ell(P)}(P)$ となることを示す。(2) $\mathcal{P}_1 \equiv \{P' \in \mathcal{P}_{221}: f(P') \in X_1(P')\}$ とおく[19]。もし $\mathcal{P}_1 = \emptyset$ ならば $|X_{\ell(P)}(P)| = 2$ かつ $\ell(P) = 2$ となる任意の $P \in \mathcal{P}^N$ に対して $f(P) \in X_2(P)$ を意味するので，（1）と合わせて $f \in PR(3, 5)$ が得られる。もし $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$ ならば，ある $i^* \in N$ およびある $\mathcal{P}^N(i^*) \subseteq \mathcal{P}_{221}$ が存在して，（1）と合わせて f は i^* が $\mathcal{P}^N(i^*)$ において独裁者となる混合ルールであることを示す。

まず（1）について，$|X_{\ell(P)}(P)| \neq 2$ または $\ell(P) \neq 2$ を満たす $P \in \mathcal{P}^N$ は，本環境では $|X_{\ell(P)}(P)| = 1$ を意味する。よって，そのような P に対しては補題2より，$f(P) = x(P)$。

次に（2）について，$\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$ のケースのみ考えれば十分である。2つのステップで示す。

ステップ1：ある $i^* \in N$ が存在して，任意の $P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}_1$ に対して $f(P') = t(P'_{i^*})$ が成り立つ。

ステップ1の証明：$P = (P_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}_1$ を任意に1つとると，$f(P) \in X_1(P)$ より，$f(P) = t(P_{i^*}) \equiv x$ となる $i^* \in N$ が一意に存在する。この i^* について，どのような $P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}_1$ に対しても $f(P') = t(P'_{i^*})$ が満たされることが示される。このことを示すために，ある $P' \in \mathcal{P}_1$ に対して $f(P') \neq t(P'_{i^*})$ とする。これは，ある $i' \neq i^*$ が一意に存在して $x' \equiv f(P') = t(P'_{i'}) \neq t(P'_{i^*}) \equiv y'$ を意味する。$y' \in X_2(P')$ より，$t(P'_{i_1}) = y'$ となる $i_1 \in N \setminus \{i^*, i'\}$ が一意に存在する。以上から，$\{z'\} \equiv X \setminus \{x', y'\}$ とおくと，P' において

$$N(x', P') = \{i'\},\ N(y', P') = \{i^*, i_1\},\ |N(z', P')| = 2 \qquad (*)$$

を満たしていることに注意する。いま，$t(P_{i'}) \equiv y$，$\{z\} \equiv X \setminus \{x, y\}$ とおくとき，i_1 の P_{i_1} における1位の選択肢に応じて，2つの場合に分ける。

ステップ1のケース1［$t(P_{i_1}) = y$ のとき］：プロファイル P^1 を

$$P^1 \equiv (\tilde{P}(P_{i_1}; x), P_{-i_1})$$

と定義すると，単調性より $f(P^1) = x$。ここで，P^1 と P' の関係について，（$*$）より

$$N(x, P^1) = \{i^*, i_1\} = N(y', P'),$$
$$N(y, P^1) = \{i'\} = N(x', P'),$$

[19] $\mathcal{P}_{221}$ は2-2-1プロファイルの集合であったことに注意する。

$$N(z, P^1) = N(z', P')$$

が得られる。$X = \{x, y, z\} = \{x', y', z'\}$ に注意すると，全単射 $\sigma(x) = y'$，$\sigma(y) = x'$, $\sigma(z) = z'$ によって

$$N(x, P^1) = N(\sigma(x), P'),$$

$$N(y, P^1) = N(\sigma(y), P'),$$

$$N(z, P^1) = N(\sigma(z), P')$$

と書けるので，補題 4 より $x' = f(P') = \sigma(f(P^1)) = \sigma(x) = y'$ が得られ矛盾。

ステップ 1 のケース 2［$t(P_{i_1}) \neq y$ のとき］：このとき，$t(P_{i_1}) = z$ である。プロファイル P^2 を

$$P^2 \equiv (\tilde{P}(P_{i_1}; x), P_{-i_1})$$

と定義すると，単調性より $f(P^2) = x$。他方，$y \in X_2(P)$ かつ $t(P_{i'}) = y$ より，$t(P_{i_2}) = y$ となる $i_2 \in N \setminus \{i^*, i', i_1\}$ が一意に存在するが，（∗）より，この i_2 は P' において $t(P'_{i_2}) = z'$ であることに注意する。プロファイル P^3 を

$$P^3 \equiv (\tilde{P}(P'_{i_2}; x'), P'_{-i_2})$$

と定義すると，単調性より $f(P^3) = x'$。ここで，P^2 と P^3 の関係について

$$N(x, P^2) = \{i^*, i_1\} = N(y', P^3),$$

$$N(y, P^2) = \{i', i_2\} = N(x', P^3),$$

$$N(z, P^1) = N(z', P^3)$$

が得られることに注意する。以降は，ケース 1 と全く同様の議論で補題 4 を用いて矛盾が導かれる。

以上から，どのような $P' \in \mathcal{P}_1$ に対しても $f(P') = t(P'_{i^*})$ を満たすことが示された。ステップ 1 より，$\mathcal{P}_1 = \{P' \in \mathcal{P}_{221}: f(P') = t(P'_{i^*}) \in X_1(P')\}$ と書ける。ここで，

$$\bar{\mathcal{P}}_1 \equiv \{P' \in \mathcal{P}_{221}: (\exists P \in \mathcal{P}_1)(\forall i \in N) t(P'_i) = t(P_i)\}$$

と定義すると，明らかに $\mathcal{P}_1 \subset \bar{\mathcal{P}}_1$ より $\bar{\mathcal{P}}_1 \neq \emptyset$。さらに Tops-Only より，任意の $\bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}_1$ に対して $f(\bar{P}) = t(\bar{P}_{i^*}) \in X_1(\bar{P})$。いま，$\mathcal{P}^N(i^*) \subseteq \mathcal{P}_{221}$ を

$$\mathcal{P}^N(i^*) \equiv \{P \in \mathcal{P}_{221}: (\exists \bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}_1)(\exists j \in N)(\exists \hat{P}_j \in \mathcal{P} \text{ with } t(\hat{P}_j) = t(\bar{P}_{i^*}))(\forall i \neq j) t(P_i) = t(\bar{P}_i) \text{ and } t(P_j) = t(\hat{P}_j)\}$$

と定める。このとき，明らかに $\mathcal{P}_1 \subset \bar{\mathcal{P}}_1 \subset \mathcal{P}^N(i^*)$ より $\mathcal{P}^N(i^*) \neq \emptyset$。$\mathcal{P}^N(i^*)$ が条件（C1）を満たす集合であることはその定義より明らかである。さらに，（C2）を満たすことも示される。

ステップ 2：$\mathcal{P}^N(i^*)$ は条件（C2）を満たす。

ステップ 2 の証明：$P \in \mathcal{P}_{221} \setminus \mathcal{P}^N(i^*)$ とする。ある $j \in N$ が存在して，$t(P'_j) = t(P_{i^*})$ を満たすある $P'_j \in \mathcal{P}$ に対して，$(P'_j, P_{-j}) \in \mathcal{P}_{221}$ かつ $(P'_j, P_{-j}) \in \mathcal{P}^N(i^*)$ とする（背理法）。このとき，ある $\bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}_1$, ある $h \in N$，および，$t(\hat{P}_h) = t(\bar{P}_{i^*})$ を満たすある $\hat{P}_h \in \mathcal{P}$ に対して，

(P'_j, P_{-j}) と $(\hat{P}_h, \bar{P}_{-h})$ は，すべての個人について 1 位が等しい。…①

他方，$P \notin \mathcal{P}^N(i^*)$ より，この $\bar{P}$，h，$\hat{P}_h$ に対して，

P と $(\hat{P}_h, \bar{P}_{-h})$ は，ある個人の 1 位が異なる。…②

①と②から，

P と（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）の間で1位が異なるのは，j のみである。…③

さて，①から，（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）における j の1位は，$t(P'_j) = t(P_{i^*})$ に等しい。よって，P においては，$t(P_j) \neq t(P_{i^*})$ でなければならない。このことは，$j \neq i^*$ を意味する。①および（P'_j, P_{-j}）と（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）が 2–2–1 プロファイルであることから，ある $i_1, i_2 \in N \setminus \{j, i^*\}$ は（P'_j, P_{-j}）と（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）で同じ1位を持つ。その選択肢を x とおく（表1参照[20]）。すると，③から P においても i_1, i_2 は x が1位である。ここで，$t(P_j) \equiv y$ とおくと，P は 2–2–1 プロファイルであることから $i_3 \in N \setminus \{j, i^*, i_1, i_2\}$ の1位が y でなければならない。よって，①と③から（P'_j, P_{-j}）と（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）においても i_3 の1位が y となる（表1参照）。以上から，表1で示されているように，P，（P'_j, P_{-j}），（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）の1位の選択肢が特定された。

ここで，仮に $h \in \{i_1, i_2, i_3\}$ とすると，$\bar{P}$ において h 以外のすべての1位が（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）と同一である（表1参照）。これは，$\bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}_1$（すなわち，$f(\bar{P}) = t(\bar{P}_{i^*}) = t(P_{i^*}) \in X_1(\bar{P})$）に反する。よって，$h \notin \{i_1, i_2, i_3\}$，すなわち，$h \in \{j, i^*\}$ である。次に，仮に $h = j$ とすると，$\bar{P}$ と（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）の1位は j 以外すべて同一である（表1参照）。よって，$\bar{P}$ は 2–2–1 プロファイルであることから，$\bar{P}$ において j の1位は y となる。このとき，$\bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}_1$ から $f(\bar{P}) = t(P_{i^*})$ である。他方，$P \notin \mathcal{P}^N(i^*)$ より $P \notin \mathcal{P}_1$ となるので，$f(P) \notin X_1(P)$，すなわち，$f(P) \in \{y, x\}$。さらに P と $\bar{P}$ は Tops-Only の前提を満たしているので $f(P) = f(\bar{P})$。これは矛盾。よって，$h = i^*$。このとき，$\bar{P}$ と（$\hat{P}_h, \bar{P}_{-h}$）の1位は i^* 以外すべて同一である（表1参照）。このとき，i^* の1位がどの選択肢になったとしても $\bar{P} \in \bar{\mathcal{P}}_1$（すなわち，$f(\bar{P}) = t(\bar{P}_{i^*}) \in X_1(\bar{P})$）に反する。以上からステップ2が示された。

ステップ3：任意の $P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N(i^*)$ に対して $f(P') = t(P'_{i^*})$ が成り立つ。

ステップ3の証明：$P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}^N(i^*)$ を任意にとる。まず，$P' \in \bar{\mathcal{P}}_1$ ならばただちに $f(P') = t(P'_{i^*})$ が従う。次に $P' \in \mathcal{P}^N(i^*) \setminus \bar{\mathcal{P}}_1$ とすると，ある $P \in \bar{\mathcal{P}}_1$，ある $j \in N$，および，$t(P''_j) = t(P_{i^*})$ を満たす

	j	i^*	i_1	i_2	i_3	f
P	y	$t(P_{i^*})$	x	x	y	y or x
(P'_j, P_{-j})	$t(P_{i^*})$	$t(P_{i^*})$	x	x	y	
$(\hat{P}_h, \bar{P}_{-h})$	$t(P_{i^*})$	$t(P_{i^*})$	x	x	y	
$\bar{P}$	$h \in \{i_1, i_2, i_3\} \Rightarrow t(P_{i^*})$ $h = j \Rightarrow y$ $h = i^* \Rightarrow t(P_{i^*})$	$h \in \{i_1, i_2, i_3\} \Rightarrow t(P_{i^*})$ $h = j \Rightarrow t(P_{i^*})$	x	x	y	$h = j \Rightarrow t(P_{i^*})$

表1

[20] 表1は，それぞれのプロファイルにおける各個人の1位の選択肢および一部のプロファイルについては選出される選択肢を示している。

ある $P''_j \in \mathcal{P}$ に対して，$P' = (P''_j, P_{-j})$と表される。$P' \notin \bar{\mathcal{P}}_1$ より $j \neq i^*$である。いま，プロファイル $\bar{P}$ を

$$\bar{P} \equiv (\tilde{P}(P_j; t(P_{i^*})), P_{-j})$$

と定義すると，単調性から$f(\bar{P}) = f(P) = t(P_{i^*})$。他方，$\bar{P}$ と P' は Tops-Only の前提を満たす。よって，$f(P') = f(\bar{P}) = f(P) = t(P_{i^*})$。以上でステップ 3 が示された。

ステップ 4：任意の $P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}_{221} \backslash \mathcal{P}^N(i^*)$に対して$f(P') \in X_2(P')$が成り立つ。

ステップ 4 の証明：$P' = (P'_i)_{i \in N} \in \mathcal{P}_{221} \backslash \mathcal{P}^N(i^*)$をとると，$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}^N(i^*)$より $P' \notin \mathcal{P}_1$ であることに注意する。よって，$f(P') \notin X_1(P')$から$f(P') \in X_2(P')$が得られる。

以上から，f は i^*が $\mathcal{P}^N(i^*)$ において独裁者となる混合ルールであること，すなわち，$f \in Mix(3, 5; N)$が示された。■

参考文献

齋藤弘樹，2022，集合的選択問題における平等待遇条件について，経済研究第 164 号，19–28.

Campbell, D.E., Kelly, J.S., 2011, Majority selection of one alternative from a binary agenda, *Economics Letters* 110, 272–273.

Jeong, H., Ju, B-G., 2017, Resolute majority rules, *Theory and Decision* 82, 31–39.

Kelly, J.S., Qi, S., 2016, Characterizing plurality rule on a fixed population, *Economics Letters* 146, 39–41.

Moulin, H., 1983, *The strategy of social choice*, North-Holland, Amsterdam.

Saitoh, H., 2022, Characterization of tie-breaking plurality rules, *Social Choice and Welfare* 59, 139–173.