『経済研究』（明治学院大学）第 166・167 合併号　2024 年

特定の次数列を満たすランダムグラフの大きさについてⅣ

浜　口　幸　弘

1. はじめに

本稿は，頂点数 n のランダムなグラフ G が，$d_1(n)$ 個の次数 1 の頂点および $d_k(n)$ 個の次数 k の頂点から構成されるコンフィギュレーションモデルを対象としたものであり，浜口（2020，2021，2022）の続編に相当する．ここでは，2 個のオープンコピーのマッチングが行われない区間，すなわちバックエッジのない区間において，オープンコピーの総数が初めて 0 になる確率と次数 k の頂点数の期待値，およびこの区間内において生成される連結成分の大きさを考察する．

2. 概念の定義

最初に，Molloy and Reed（1995，1998）によるコンフィギュレーションモデル F の構成アルゴリズムを説明する．そこで，次のように各用語を定義する．頂点 v に対して，そのすべてのコピーがマッチングされているならば，v は“completely exposed（完全開示）”状態にあるといい，コピーのすべてではなく一部がマッチングされているならば，v は“partially exposed（部分開示）”状態にあるという．そして，それ以外の頂点は“unexposed（未開示）”状態にある．また，部分開示の頂点のコピーにおいて，まだマッチングされていないコピーを“open”状態にあるという．この定義のもと F の構成アルゴリズムは以下のとおりである．

F の構成アルゴリズム

1. 各頂点 v に対して，その次数分 $\deg(v)$ 個のコピーを作り，全体のコピーの集合を L とする．
2. L の要素が尽きるまで以下の手続きを繰り返す．

(a)　L の任意の要素 1 つを選択し，次に、その対となるもう 1 つの要素を L からランダムに選択する．これら 2 つの要素（マッチング対）を L から除外する．

(b)　部分開示の頂点がある限り以下の手続きを繰り返す．尽きれば(a)に戻る．

部分開示にある頂点のオープンコピーを L から選択し（ランダムでなくてもよい），その対となる要素を L からランダムに選択する．これら 2 つの要素（マッチング対）を L から除外する．

このアルゴリズムによれば，1 つの連結成分（component）が完成してから，次の新たな連結成分の構成に取り掛かることになる（手続き 2(a)に戻る）．

以下では，頂点数 n のランダムなグラフ G が，$d_1(n)$ 個の次数 1 の頂点および $d_k(n)$ 個の次数 k の頂点から構成される場合について考察を行う．第 $t(t \geq 0)$ 回目の試行の結果，部分開示の頂点を含む連結成分（高々1 つ存在）に含まれるオープンコピーの総数を X_t と定義する．このとき，$X_i > 0$ $(0 \leq i \leq t-1)$ の場合に対して，前述のアルゴリズムは以下のように関数 $\mu(x)$ を用いて定式化できる．ただし，その手続き 2. (a)における最初の要素の任意選択では，次数 k の未開示な頂点のコピーを優先的に選択するものとする．なお，以下のアルゴリズムにおいて初期状態をオープンコピーとみなす考え方は，部分開示の頂点をオープンコピーとする上記定義と若干違いがあるが，頂点コピーの選択確率は同じである．

$$\mu(x) = \begin{cases} k-2：L \text{ から次数 } k \text{ の未開示な頂点のコピー} x \text{ を選択する場合,} \\ -1：L \text{ から次数 1 の未開示な頂点のコピー} x \text{ を選択する場合,} \\ -2：L \text{ から部分開示にある頂点のコピー} x \text{ を選択する場合,} \end{cases}$$

$$X_0 = k, \quad X_t = X_{t-1} + \mu(x) \quad (x \in L).$$

ただし，X_t が 0 になった時点でその連結成分の生成は完了し，改めて，$X_t = k$ と設定し直して，第（$t+1$）回目のコピーの選択から新しい連結成分の生成が開始される．

以下では，M を最初の状態における総コピー数とし，次数 k の値は，断りがなければ，$4 \leq k \leq n^{\frac{1}{8}}$ とする（場合によっては，$n \to \infty$ のとき，$k \to \infty$ かつ $k \leq n^{\frac{1}{8}}$ とする）．次に，基準値 α を以下のように定義する．これは Molloy and Reed の $Q(\boldsymbol{D})$ の定義に似ているが，本稿独自のものである．

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} i(i-2) \frac{d_i(n)}{n} = -\frac{d_1(n)}{n} + \frac{k(k-2)d_k(n)}{n}$$ として，$\lim_{n\to\infty} \alpha$ は，$0 < \lim_{n\to\infty} \alpha < 1/2$ を満たすように収束する（なお以下では，十分大きな n を前提にするので，$0 < \alpha < 1/2$ と考える）．このとき，$d_1(n) + d_k(n) = n$ かつ $M = d_1(n) + kd_k(n)$ なので，以下を得る．

$$d_1(n) = \frac{k(k-2)-\alpha}{(k-1)^2} n, \quad d_k(n) = \frac{\alpha+1}{(k-1)^2} n, \quad M = \frac{k+\alpha}{k-1} n.$$

また，$n < M \leq \frac{3n}{2}$ である．以降では，簡単のために $n_1 = d_1(n)$ および $n_k = d_k(n)$ と記す．

3. ランダムグラフの生成

まず，浜口（2020）の補題 1 を修正して，バックエッジの起こらない区間の大きさを改善するような以下の補題 1 を提示する．なお，前述の頂点コピー選択の定義から，最初に次数 k の頂点のコピーを選択するものとし，これは確率的選択の回数に含めないものとする．

補題 1

$0<\delta<\dfrac{1}{8}$ に対して，σ を $\sigma=n^{\frac{1}{2}+\delta}$ とする．また，$n\to\infty$ のとき，$k\to\infty$ かつ $k\leq n^{\frac{1}{8}}$ とする．試行回数 t が $t\leq M/\sigma$ の場合，ほとんどすべてのコンフィギュレーション F_t において，2 個のオープンコピーのマッチングは行われない．

証明

まず，$t\leq k^2\leq n^{1/4}$ の場合は，浜口（2020）の補題 1 から主張が成り立つ．次に，$k^2\leq t\leq M/\sigma$ の場合について以下のように考える．

F の構成アルゴリズムにおいて，第 t ステップまでバックエッジの起こらない事象を NB_t とし，確率変数 Y を t 回までの試行において次数 k の頂点コピー（未開示またはオープン）が選択される回数とする．そして，Y_i を以下のような確率変数とする．

$$Y_i=\begin{cases} 1 & \text{：}i\text{ 回目に，次数 }k\text{ の頂点コピー（未開示またはオープン）が選択される場合，} \\ 0 & \text{：そうでない場合，}\end{cases}$$

$$Y=Y_1+\cdots+Y_t.$$

上記の確率変数 Y および Y_i に対して，以下のように確率変数 Z および Z_i を定める．

$$P(Z_i=1)=\frac{kn_k}{M-2i}=\frac{kn_k}{M}\left(1+O\left(\frac{i}{M}\right)\right),\quad P(Z_i=0)=1-P(Z_i=1)\quad(0\leq i\leq t),$$

$$Z=Z_1+\cdots+Z_t.$$

このとき，Z_i は互いに独立である．よって，以下の式が成り立つ．

$$P(Z_i=1)\geq P(Y_i=1\,|\,Y_1,\cdots,Y_{i-1}).$$

すなわち，負でない実数 x に対して，

$$P(Z_i\geq x)\geq P(Y_i\geq x\,|\,Y_1,\cdots,Y_{i-1}).$$

これは，確率的優位性（stochastic dominance）の前提条件（例えば，Frieze and Karonski (2016) を参照）を満たすので，以下を得る．

$$P(Z\geq x)\geq P(Y\geq x).$$

そこで，Chernoff/Hoeffding の不等式（Frieze and Karonski (2016)）を変数 Z に適用すれば Z の期待値 μ を得る．$\varepsilon=\dfrac{3}{2(\alpha+1)}-1>0$ に対して，

$$\mu=E(Z)=\sum_{i=1}^{t}E(Z_i)=\frac{kn_k}{M}t\left(1+O\left(\frac{t}{M}\right)\right).$$

また，

$$\begin{aligned}P(Z\geq(1+\varepsilon)\mu)&\leq\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon/3)}\mu\right)\\&\leq\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{3}\frac{(\alpha+1)k}{(k-1)(k+\alpha)}t\right)\end{aligned}$$

$$\leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{6}\frac{t}{k}\right).$$

最後の不等式は，$\dfrac{(\alpha+1)k}{(k-1)(k+\alpha)} \geq \dfrac{1}{2k}$ による．よって，前述の結果から以下の式を得る．

$$P(Y \leq (1+\varepsilon)\mu) \geq 1-\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{6}\frac{t}{k}\right).$$

このことから，

$$P(NB_t) \geq P(Y \leq (1+\varepsilon)\mu)P(NB_t|Y \leq (1+\varepsilon)\mu)$$
$$\geq \left(1-\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{6}\frac{t}{k}\right)\right)P(NB_t|Y \leq (1+\varepsilon)\mu).$$

ここで，オープンコピーの数が 0 になったとき，任意に選択される次数 k の頂点のオープンコピーの総数は高々 $k \times (t/k)$ 個になることを考慮すると，$Y \leq (1+\varepsilon)\mu$ が成り立つとき，オープンコピーの数の上限は以下となる．

$$kY + k\frac{t}{k} \leq k(1+\varepsilon)\frac{(\alpha+1)k}{(k-1)(k+\alpha)}t\left(1+O\left(\frac{t}{M}\right)\right)+t \leq 3t.$$

さて，コンフィギュレーションモデルの定義によれば，以下の式が成り立つ．

$$P(NB_t) = \prod_{i=1}^{t}\frac{M-(2i-1)-(X_{i-1}-1)}{M-(2i-1)}.$$

$Y \leq (1+\varepsilon)\mu$ が成り立つ条件下で，前述のオープンコピー数の上限を用いれば，上式において $X_{i-1}-1 \leq 3t$ となるから，以下の評価を得る．なお，$n_k \geq n^{3/4}$ なので，t 回までの試行において，次数 k の未開示の頂点コピーの数が 0 になることはない．

$$P(NB_t|Y \leq (1+\varepsilon)\mu) \geq \left(1-\frac{3t}{M-(2t-1)}\right)^t \geq 1-\frac{3t^2}{M-(2t-1)} \geq 1-O\left(\frac{M}{\sigma^2}\right).$$

したがって，

$$P(NB_t) \geq \left(1-\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{6}\frac{t}{k}\right)\right)\left(1-O\left(\frac{M}{\sigma^2}\right)\right) \to 1.$$

よって，主張は成り立つ． □

浜口（2020）の補題 1 では，$\sigma = n^{\frac{9}{16}+\delta}$ なので，$n^{\frac{1}{16}}$ の改善である．

バックエッジの起こらない区間の特徴の一つとして，生成される連結成分はすべて木になることを挙げられる．以下では，バックエッジの起こらない区間において生成される木について，その大きさを確率的に評価する．

補題 1 に示す区間では，ほとんどすべてのランダムグラフにおいて，2 個のオープンコピーのマッチングは行われない．このとき，当区間における頂点コピーの選択は次のような試行と見なせる．

$X_0 = a$（a は正の整数），

$$T_r = \begin{cases} k-2 & : r\text{ 回目に } L \text{ から次数 } k \text{ の未開示な頂点のコピーを選択する場合,} \\ -1 & : r\text{ 回目に } L \text{ から次数 } 1 \text{ の未開示な頂点のコピーを選択する場合,} \end{cases}$$

$$X_r = X_0 + T_1 + \cdots + T_r \qquad (r \geq 1).$$

そこで，t 回までの試行において，a は正の整数とし，$X_0 = a$，$X_1 \geq 1, \ldots, X_{t-1} \geq 1$，$X_t = 0$ となるような試行の組の総数を近似評価する．

まず，最初の状態 a から出発して，途中 $X_r (1 \leq r \leq t-1)$ が 0 以下になる場合も含めて，$X_t = 0$ となるすべての場合の数を $N_t(a, 0)$ と記す（試行は t 回まで継続して行う）．次に，j $(1 \leq j \leq t)$ 回目の試行において初めて $X_j = 0$ となるすべての場合の数を $N'_j(a, 0)$ と記す．

さて，X_j が 0 になるならば，i を次数 k の未開示な頂点のコピーを選択する回数として，$j = (k-1)i + a$ と表され，逆に，$j = (k-1)i + a$ と表されるならば，$X_j = 0$ となる．これは，大きさ $(k-1)i + a$ の連結成分, すなわち i 個の次数 k の頂点と $(k-2)i + a$ 個の次数 1 の頂点からなる木が生成されることを意味する．このとき，以下のような漸化式が成り立つ．

$$N_{(k-1)m+a}(a, 0) = \sum_{i=0}^{m} N'_{(k-1)i+a}(a, 0) \binom{(k-1)(m-i)}{m-i}.$$

補題 2 では，$N'_j(a, 0)$ の大きさを評価するが，上式および次の不等式（例えば，Bollobás（2001）参照）を利用する．$1 \leq m \leq n/2$ ならば,

$$\frac{1}{e^{1/(6m)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{m}\right)^m \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m} \left(\frac{n}{m(n-m)}\right)^{1/2} \leq \binom{n}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{m}\right)^m \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m} \left(\frac{n}{m(n-m)}\right)^{1/2}.$$

補題 2

a は $a \geq k$ を満たす整数とし，i を次数 k の未開示な頂点のコピーを選択する回数とする．このとき，以下の式が成り立つ．

$$N'_a(a, 0) = 1,\quad N'_{k-1+a}(a, 0) = a,\quad N'_{(k-1)2+a}(a, 0) = \frac{a(2k-3+a)}{2},$$

$$a\left(\frac{3(k-1)}{2}\right)^{i-1} \leq N'_{(k-1)i+a}(a, 0)$$

$$\leq \binom{(k-1)i+a}{i} - \binom{(k-1)i}{i} - a\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{3(k-1)}{2}\right)^{j-1}\binom{(k-1)(i-j)}{i-j} \quad (i \geq 1).$$

特に，$n \to \infty$ のとき $k \to \infty$ かつ $k \leq n^{\frac{1}{8}}$ として，$a = k$，$i \geq 1$ かつ $i = o(k)$ とする．このとき，以下の式が成り立つ．

$$k\left(\frac{3(k-1)}{2}\right)^{i-1} \leq N'_{(k-1)i+k}(k, 0) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi i}}\left(e(k-1)\right)^i.$$

証明

最初の 3 つの等式は，直接数え上げることによって求まる．

次に続く不等式の左側の部分を示すために，$N'_{(k-1)(i+1)+a}(a, 0)$，$N'_{(k-1)i+a}(a, 0)$ および $N'_{(k-1)(i-1)+a}(a, 0)$ の関係を評価する．まず，$i \geq 1$ に対して，以下の式が成り立つことを帰納法で示す．

$$\frac{3(k-1)}{2}N'_{(k-1)i+a}(a,\,0) \le N'_{(k-1)(i+1)+a}(a,\,0).$$

$i=1$ の場合は明らかに成り立つ．$i \ge 2$ のとき，$i-1$ に対して，上式が成り立つと仮定する．そこで，横軸が頂点コピーを確率的に選択する試行回数を表し，縦軸がオープンコピーの数 X_r を表すような座標平面上で考える．そして，$t \ge 0$ に対して，点 $\mathrm{A}_t((k-1)(i-1)+a-t, t)$，点 $\mathrm{B}_t((k-1)i+a-t, t)$，点 $\mathrm{C}_t((k-1)(i+1)+a-t, t)$ を定める．このとき，最初の状態から出発して B_0 で初めてオープンコピーの数が 0 になる場合は，B_{k-1} を常に経由し，その後，ただ 1 通りの経路である $\mathrm{B}_{k-2},\ldots,\mathrm{B}_1$ を経て B_0 に至ることを意味する．一方，途中でオープンコピーの数が 0 にならないで C_0 に至る場合は，B_{k-1} を経由する $k-1$ 通り（B_{k-1} から C_{2k-3}，B_{k-2} から $\mathrm{C}_{2k-4},\ldots,\mathrm{B}_1$ から C_{k-1} を経る各経路の数の和）の場合と B_{k-1} を経由しない場合に分けられる．ここで，後者の場合の数を考えると，以下のように評価できる．

$$(\mathrm{B}_{k-1}\text{ に至る経路の数}) = (\mathrm{B}_k\text{ に至る経路の数}) + (\mathrm{A}_1\text{ に至る経路の数}),$$
$$(\mathrm{B}_k\text{ に至る経路の数}) = (\mathrm{B}_{k+1}\text{ に至る経路の数}) + (\mathrm{A}_2\text{ に至る経路の数}),$$
$$\cdots$$
$$(\mathrm{B}_{2k-3}\text{ に至る経路の数}) = (\mathrm{B}_{2k-2}\text{ に至る経路の数}) + (\mathrm{A}_{k-1}\text{ に至る経路の数}),$$

ただし，

$$N'_{(k-1)i+a}(a,\,0) = (\mathrm{B}_1\text{ に至る経路の数}) = \cdots = (\mathrm{B}_{k-1}\text{ に至る経路の数}),$$
$$N'_{(k-1)(i-1)+a}(a,\,0) = (\mathrm{A}_1\text{ に至る経路の数}) = \cdots = (\mathrm{A}_{k-1}\text{ に至る経路の数}).$$

上述のことから，$k \le t \le 2k-2$ のとき，B_t そして C_{t+k-2} を経由して C_0 に至る経路の数は，$N'_{(k-1)i+a}(a,\,0)-(t-k+1)N'_{(k-1)(i-1)+a}(a,\,0)$ 通りである（上記の連立式を解くことによる）．
したがって，以下を得る．

$$\begin{aligned}
&N'_{(k-1)(i+1)+a}(a,\,0)\\
&\ge (k-1)N'_{(k-1)i+a}(a,\,0)+\sum_{t=1}^{k-1}\left(N'_{(k-1)i+a}(a,\,0)-tN'_{(k-1)(i-1)+a}(a,\,0)\right)\\
&= (2k-2)N'_{(k-1)i+a}(a,\,0)-\frac{k(k-1)}{2}N'_{(k-1)(i-1)+a}(a,\,0)\\
&\ge (2k-2)N'_{(k-1)i+a}(a,\,0)-\frac{k(k-1)}{2}\cdot\frac{2}{3(k-1)}N'_{(k-1)i+a}(a,\,0)\\
&=\left(\frac{5k-6}{3}\right)N'_{(k-1)i+a}(a,\,0) \ge \frac{3(k-1)}{2}N'_{(k-1)i+a}(a,\,0).
\end{aligned}$$

なお，最後から 2 番目の不等式は帰納法の仮定を用いている．よって，主張にある不等式の左側の部分を得る．

次に，不等式の右側の部分を考える．X_j が 0 になるのは，ある負でない整数 i を用いて，$j=(k-1)i+a$ と表される場合に限られ，次数 k の未開示な頂点のコピーを選択する回数は i であり，次数 1 の未開示な頂点のコピーを選択する回数は $(k-2)i+a$ である．よって，$N_{(k-1)i+a}(a,0)$ は以下のように表せる．

$$N_{(k-1)i+a}(a,\,0)=\binom{(k-1)i+a}{i}.$$

よって，前述の漸化式，および主張にある不等式の左側の部分を用いて以下を得る．$i\geq 1$ の場合，

$$\begin{aligned}N'_{(k-1)i+a}(a,\,0)&=\binom{(k-1)i+a}{i}-\sum_{j=0}^{i-1}N'_{(k-1)j+a}(a,\,0)\binom{(k-1)(i-j)}{i-j}\\&\leq\binom{(k-1)i+a}{i}-\binom{(k-1)i}{i}-a\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{3(k-1)}{2}\right)^{j-1}\binom{(k-1)(i-j)}{i-j}.\end{aligned}$$

特に，$n\to\infty$ のとき $k\to\infty$ かつ $k\leq n^{\frac{1}{8}}$ として，$a=k$，$i\geq 1$ かつ $i=o(k)$ の場合を考える．左側の不等式，および $i=1$ における右側の不等式は明らかに成り立つので，$i\geq 2$ として右側の不等式を考える．上述の漸化式，および $\binom{n}{m}$ の近似式を用いると以下を得る．

$$\begin{aligned}&N'_{(k-1)i+k}(k,\,0)=\binom{(k-1)i+k}{i}-\sum_{j=0}^{i-1}N'_{(k-1)j+k}(a,\,0)\binom{(k-1)(i-j)}{i-j}\\&\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(k-1)i+k}{i}\right)^{i}\left(\frac{(k-1)i+k}{(k-1)i+k-i}\right)^{(k-1)i+k-i}\left(\frac{(k-1)i+k}{i((k-1)i+k-i)}\right)^{1/2}\\&\quad-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2k}{3(k-1)}\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{3(k-1)}{2}\right)^{j}\frac{1}{e^{1/6(i-j)}}(k-1)^{i-j}\left(\frac{k-1}{k-2}\right)^{(k-2)(i-j)}\left(\frac{k-1}{(k-2)(i-j)}\right)^{1/2}\\&\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(k-1)^{i}e^{k/(k-1)}\frac{e^{i}}{\sqrt{i}}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\&\quad-\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{3(k-1)}{2}\right)^{j}\frac{1}{e^{1/6}}(k-1)^{i-j}e^{i-j}\frac{1}{\sqrt{i}}\left(1-O\left(\frac{i}{k}\right)\right)\\&\leq\frac{e}{\sqrt{2\pi i}}(e(k-1))^{i}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\&\quad-\frac{2}{3e^{1/6}\sqrt{2\pi i}}(e(k-1))^{i}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{3}{2e}\right)^{j}\left(1-O\left(\frac{i}{k}\right)\right)\\&\leq\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\,(e(k-1))^{i}.\end{aligned}$$

□

これまでの結果をもとに以下の定理1および定理2を示す．各定理では，コンフィギュレーションの最初から考えるので，$a=k$ とする．そして，補題1で示したバクエッジの起こらない区間を対象とするので，次数 k の未開示な頂点のコピーを選択する回数の上限 m は $(k-1)m+k\leq M/\sigma$ を満たす必要があるが，これらの定理では $m=o(k)$ とするので，この不等式は満たされる．また，次数 k の未開示な頂点のコピーを i 回選択した状態で，最初の試行からオープンコピーの数が初めて0になる事象を A_i とする．なお，証明では以下の式を用いる．定数 r および $0<x<1$ に対して，

$$\sum_{i=r}^{\infty} x^i = \frac{x^r}{1-x}, \qquad \sum_{i=r}^{\infty} ix^i = \frac{x^r(r-(r-1)x)}{(1-x)^2}.$$

定理 1

$n \to \infty$ のとき，$k \to \infty$ かつ $k \leq n^{\frac{1}{8}}$ とする．m は，$n \to \infty$ のとき $m \to \infty$ であり，$m = o(k)$ を満たす正の整数とする．

(1)区間［$0, (k-1)m+k$］において，以下の式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} P(A_0) = \frac{1}{e^{\alpha+1}}, \quad \lim_{n\to\infty} P(A_1) = \frac{\alpha+1}{e^{2(\alpha+1)}}, \quad \lim_{n\to\infty} P(A_2) = \frac{3(\alpha+1)^2}{2e^{3(\alpha+1)}},$$

$$\frac{2}{3} e^{-(\alpha+1)} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha+1}{e^{\alpha+1}}\right)^i \leq \lim_{n\to\infty} P(A_i) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi i}}\, e^{-(\alpha+1)} \left(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}}\right)^i \quad (l \leq i \leq m).$$

また，以下の不等式が成り立つ．

$$\frac{1}{e^{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{e^{2(\alpha+1)}} + \frac{3(\alpha+1)^2}{2e^{3(\alpha+1)}} + \frac{9(\alpha+1)^3}{2e^{3(\alpha+1)}} \cdot \frac{1}{2e^{\alpha+1}-3(\alpha+1)} \leq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{m} A_i\right)$$

$$\leq \frac{1}{e^{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{e^{2(\alpha+1)}} + \frac{3(\alpha+1)^2}{2e^{3(\alpha+1)}} + \frac{(\alpha+1)^3}{e^{3\alpha+1}} \cdot \frac{1}{e^{\alpha}-(\alpha+1)}.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq m} iP(A_i) = 0$ であり，以下の不等式が成り立つ．

$$\frac{\alpha+1}{e^{2(\alpha+1)}} + \frac{3(\alpha+1)^2}{e^{3(\alpha+1)}} + \left(27(\alpha+1)^3\left(1-\frac{\alpha+1}{e^{\alpha+1}}\right)\right) \Big/ \left(4e^{4(\alpha+1)}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha+1}{e^{\alpha+1}}\right)^2\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} iP(A_i)$$

$$\leq \frac{\alpha+1}{e^{2(\alpha+1)}} + \frac{3(\alpha+1)^2}{e^{3(\alpha+1)}} + \left((\alpha+1)^3\left(3-\frac{2(\alpha+1)}{e^{\alpha}}\right)\right) \Big/ \left(e^{4\alpha+1}\left(1-\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}}\right)^2\right).$$

証明

(1)区間［$0, (k-1)\mathrm{m}+k$］においてバックエッジの起こらない事象を NB とする．補題 1 からこの区間において，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} P(A_i) &= P(NB)P(A_i|NB) + (1-P(NB))P(A_i|NB^c) \\ &= (1-o(1))P(A_i|NB) + o(1) \\ &\sim P(A_i|NB). \end{aligned}$$

以下の議論ではこの関係式を用いることにする．

ここで，$P(A_i|NB)$ の大きさを評価する．まず，$i \leq 2$ の場合は直接数え上げて確率を求める．

$$\begin{aligned} P(A_0|NB) &= \left(\frac{n_1}{M}\right)^k (1+O(1)) \\ &= \left(\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{k}{k+\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\right)^k (1+O(1)) \\ &\to \frac{1}{e^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(A_1|NB) &= k\frac{kn_k}{M}\left(\frac{n_1}{M}\right)^{2k-2}\left(1+O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right)\\
&= \frac{(\alpha+1)k^2}{(k-1)(k+\alpha)}\left(\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k}{k+\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\right)^{2k-2}\left(1+O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right)\\
&\to \frac{\alpha+1}{e^{2(\alpha+1)}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(A_2|NB) &= \frac{3k(k-1)}{2}\left(\frac{kn_k}{M}\right)^2\left(\frac{n_1}{M}\right)^{3k-4}\left(1+O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right)\\
&= \frac{3k(k-1)}{2}\left(\frac{(\alpha+1)k}{(k-1)(k+\alpha)}\right)^2\left(\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k}{k+\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\right)^{3k-4}\left(1+O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right)\\
&\to \frac{3(\alpha+1)^2}{2e^{3(\alpha+1)}}.
\end{aligned}
$$

$3\leq i\leq m$ のとき，$P(A_i|NB)$ の上限を次のように評価する．最初に次数 k の未開示な頂点のコピーを 1 個任意に選択して，以降，次数 k の未開示な頂点のコピーを i 個続けて確率的に選択し，その後，次数 1 の未開示な頂点のコピーを $(k-2)i+k$ 個続けて確率的に選択する場合が $P(A_i|NB)$ の上限を与えると考える．すなわち，補題 2 を用いて以下のようになる．なお，$m=o(k)$ なので $k^2i^2=o(n)$ となることに注意する．

$$
\begin{aligned}
&P(A_i|NB)\\
&\leq N'_{(k-1)i+k}(k,0)\frac{kn_k-k}{M-k}\cdot\frac{kn_k-2k}{M-2k}\cdot\cdots\cdot\frac{kn_k-ik}{M-ik}\cdot\frac{n_1}{M-ik}\cdot\frac{n_1-1}{M-ik-1}\cdot\cdots\\
&\quad\cdot\frac{n_1-((k-2)i+k-1)}{M-ik-((k-2)i+k-1)}\\
&\leq\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\,(e(k-1))^i\frac{(kn_k-k)^i n_1{}^{(k-2)i+k}}{(M-ik)^i(M-ik-((k-2)i+k-1))^{(k-2)i+k}}\\
&\leq\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\,(e(k-1))^i\left(\frac{kn_k-k}{M-ik}\right)^i\left(\frac{n_1}{M-2(i+1)k}\right)^{(k-2)i+k}\\
&\leq\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\left(e(k-1)\frac{kn_k}{M}\right)^i\left(\frac{n_1}{M}\right)^{(k-2)i+k}\left(1+O\left(\frac{k^2i^2}{n}\right)\right)\\
&\leq\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\left(e\frac{(\alpha+1)k}{k+\alpha}\right)^i\left(\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k}{k+\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\right)^{(k-2)i+k}\left(1+O\left(\frac{k^2i^2}{n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

一方，$P(A_i|NB)$ の下限は次のように評価する．最初に次数 k の未開示な頂点のコピーを 1 個任意に選択して，以降，次数 1 の未開示な頂点のコピーを $(k-2)i+k$ 個続けて確率的に選択し，その後，次数 k の未開示な頂点のコピーを i 個続けて確率的に選択する場合（実際には起こりえないが，計算を簡単にするため）が $P(A_i|NB)$ の下限を与えると考える．

$$
\begin{aligned}
&P(A_i|NB)\\
&\geq N'_{(k-1)i+k}(k,\,0)\frac{n_1}{M-k}\cdot\frac{n_1-1}{M-k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n_1-((k-2)i+k-1)}{M-k-((k-2)i+k-1)}\\
&\quad\cdot\frac{kn_k-k}{M-k-((k-2)i+k)}\cdot\frac{kn_k-2k}{M-2k-((k-2)i+k)}\cdot\cdots\cdot\frac{kn_k-ik}{M-ik-((k-2)i+k)}\\
&\geq k\left(\frac{3(k-1)}{2}\right)^{i-1}\left(\frac{n_1-((k-2)i+k-1)}{M-k}\right)^{(k-2)i+k}\left(\frac{kn_k-ik}{M-k-((k-2)i+k)}\right)^i\\
&\geq\frac{2k}{3(k-1)}\left(\frac{n_1}{M}\right)^{(k-2)i+k}\left(\frac{3(k-1)}{2}\cdot\frac{kn_k}{M}\right)^i\left(1-O\left(\frac{k^2i^2}{n}\right)\right)\\
&\geq\frac{2k}{3(k-1)}\left(\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k}{k+\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{k(k-2)}\right)\right)^{(k-2)i+k}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha+1)k}{k+\alpha}\right)^i\left(1-O\left(\frac{k^2i^2}{n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

したがって，以下を得る．

$$\frac{2}{3}e^{-(\alpha+1)}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha+1}{e^{\alpha+1}}\right)^i\leq\lim_{n\to\infty}P(A_i)\leq\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\,e^{-(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}}\right)^i.$$

次に，$P\left(\bigcup_{i=0}^{m}A_i\right)$ の大きさを評価するが，まず，前述のように以下が成り立つ．

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{m}A_i\right)\sim P\left(\bigcup_{i=0}^{m}A_i|NB\right).$$

そして各事象 A_i は互いに排反だから，右辺は以下のようになる．

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{m}A_i|NB\right)=P(A_0|NB)+P(A_1|NB)+P(A_2|NB)+\sum_{i=3}^{m}P(A_i|NB).$$

ここで，上記の結果から以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=3}^{m}P(A_i|NB)\leq\sum_{i=3}^{m}\left(e(k-1)\frac{kn_k}{M}\left(\frac{n_1}{M}\right)^{k-2}\right)^i\left(\frac{n_1}{M}\right)^k\left(1+O\left(\frac{k^2m^2}{n}\right)\right),\\
&\sum_{i=3}^{m}P(A_i|NB)\geq\frac{2k}{3(k-1)}\sum_{i=3}^{m}\left(\frac{3(k-1)}{2}\cdot\frac{kn_k}{M}\left(\frac{n_1}{M}\right)^{k-2}\right)^i\left(\frac{n_1}{M}\right)^k\left(1-O\left(\frac{k^2m^2}{n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

したがって，極限をとれば，上記の結果を用いて主張を得る．

⑵上述の無限級数に関する式，および⑴を利用して主張を得る．

□

さて補題 1，補題 2 および定理 1 を利用して以下の定理 2 を導ける．

定理 2

$n\to\infty$ のとき，$k\to\infty$ かつ $k\leq n^{\frac{1}{8}}$ とする．このとき，ほとんどすべてのコンフィギュレーションに対し，試行区間［$0, M/\sigma$］において，大きさが少なくとも $\varepsilon n^{\frac{1}{2}-\delta}$ （$0<\varepsilon<1$，$0<\delta<\frac{1}{8}$）の連結成分が生成される．

証明

オープンコピー数が k 個の初期状態から始めて，次数 k の頂点コピーの選択回数が m 回以内に，j 回目となるオープンコピー数 0 個の状態が起こる事象を B_j とする．そして，この j 回目以降，当区間においてオープンコピー数が 0 にならない事象を C_j とする．なお，$n\to\infty$ のとき，$m\to\infty$ であり，$m=o(k)$ かつ $m\leq\log\log n$ とし，また，$0\leq j\leq r=\log\log n$ とする．まず，以下の式が成り立つ．

$$P(B_1|NB)=P\left(\bigcup_{i=0}^{m}A_i|NB\right),$$

$$P(C_0|NB)\geq 1-P\left(\bigcup_{i=0}^{M/(\sigma(k-1))}A_i|NB\right).$$

なお，C_0 は当区間においてオープンコピー数が一度も 0 にならない事象を表し，次数 k の頂点コピーの選択回数は，$M/(\sigma(k-1))$ を超えることはない．

次に，各事象 $B_1\cap\cdots\cap B_j\cap C_j$ $(0\leq j\leq r)$ は互いに排反なので，以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&P(C_0\cup(B_1\cap C_1)\cup\cdots\cup(B_1\cap\cdots\cap B_r\cap C_r)|NB)\\&=P(C_0|NB)+P(B_1\cap C_1|NB)+\cdots+P(B_1\cap\cdots\cap B_r\cap C_r|NB)\\&=\sum_{j=0}^{r}P(B_1\cap\cdots\cap B_j\cap C_j|NB).\end{aligned}$$

ここで，$(rkm)^2=o(n)$ が成り立つので，これに基づき以下の式を j の大きさに関する帰納法で示す．$0\leq j\leq r=\log\log n$ に対して，

$$P(B_1\cap\cdots\cap B_j\cap C_j|NB)=(P(B_1|NB))^jP(C_0|NB)\left(1+O\left(\frac{(rkm)^2}{n}\right)\right).$$

$j=0$ の場合は明らかに成り立つ．$j-1(j\geq 1)$ に対して上式が成り立つと仮定すると，以下を得る．

$$\begin{aligned}P(B_1\cap\cdots\cap B_j\cap C_j|NB)&=P(B_1|NB)P(B_2\cap\cdots\cap B_j\cap C_j|B_1\cap NB)\\&=P\left(\bigcup_{i=0}^{m}A_i|NB\right)P(B_2\cap\cdots\cap B_j\cap C_j|B_1\cap NB)\\&=\sum_{i=0}^{m}P(A_i|NB)P(B_2\cap\cdots\cap B_j\cap C_j|A_i\cap NB)\\&=\sum_{i=0}^{m}P(A_i|NB)(P(B_1|NB))^{j-1}P(C_0|NB)\left(1+O\left(\frac{(rkm)^2}{n}\right)\right)\\&=(P(B_1|NB))^jP(C_0|NB)\left(1+O\left(\frac{(rkm)^2}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

なお，最後から 2 番目の等式は，事象 A_i が起こったとき，オープンコピー数は初期化されて k 個となるので，$B_2,...,B_j,C_j$ の添え字を改め，さらに $(rkm)^2=o(n)$ に基づく近似評価により以下の式が成り立つことによる．

$$P(B_2 \cap \cdots \cap B_j \cap C_j | A_i \cap NB) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1} \cap C_{j-1} | NB)\left(1 + O\left(\frac{(rkm)^2}{n}\right)\right).$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&P(C_0 \cup (B_1 \cap C_1) \cup \cdots \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_r \cap C_r) | NB) \\
&= \sum_{j=0}^{r} (P(B_1|NB))^j P(C_0|NB)\left(1 + O\left(\frac{(rkm)^2}{n}\right)\right) \\
&\geq \sum_{j=0}^{r} \left(P\left(\bigcup_{i=0}^{m} A_i|NB\right)\right)^j \left(1 - P\left(\bigcup_{i=0}^{M/(\sigma(k-1))} A_i|NB\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{(rkm)^2}{n}\right)\right) \\
&\to (1 + p + p^2 + \cdots)(1-p) = 1 .
\end{aligned}$$

最後の極限は，定理 1 から $0 < \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{m} A_i|NB\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{M/(\sigma(k-1))} A_i|NB\right) < 1$ であり，これを p とすることによる．このとき，

$$\begin{aligned}
&P(C_0 \cup (B_1 \cap C_1) \cup \cdots \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_r \cap C_r)) \\
&\sim P(C_0 \cup (B_1 \cap C_1) \cup \cdots \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_r \cap C_r) | NB)
\end{aligned}$$

なので，$P(C_0 \cup (B_1 \cap C_1) \cup \cdots \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_r \cap C_r)) \to 1$ となる．この式は試行区間［$0, M/\sigma$］において，大きさが少なくとも $M/\sigma - r((k-1)m+k) \geq \varepsilon n^{\frac{1}{2}-\delta}$ （$0 < \varepsilon < 1$）の連結成分が生成されることを意味する． □

定理 1 から，バックエッジの起こらない区間［$0, M/\sigma$］において，大きさ Ck（C は正の定数）の木が一定の確率に従い生成されることがわかる．また定理 2 から，同区間において，少なくとも $\varepsilon n^{\frac{1}{2}-\delta}$ （$0 < \varepsilon < 1$）の大きさの連結成分がほぼ確実に生成されるので，2 つの定理から考察すると，その中間の大きさの連結成分はほとんど生成されないと推測できる．

4. 課題

引き続き考察を行って，次回にまとめを行う予定である．

参考文献

B. Bollobás, *Random Graphs*（2nd edition）(2001). Cambridge Univ. Press.

Frieze, A and Karoński, M. *Introduction to random graphs,* Cambridge University Press（2016）

M. Molloy and B. Reed, "A Critical Point for Random Graphs with a Given Degree Sequence", *Random Structures and Algorithms* 6, 161-180（1995).

M. Molloy and B. Reed, "The Size of the Largest Component of a Random Graph on a Fixed De-

gree Sequence”, *Combinatorics, Probability and Computing* 7, 295-306 (1998).
浜口幸弘, 特定の次数列を満たすランダムグラフの大きさについて, 明治学院大学経済研究 160 (2020).
浜口幸弘，特定の次数列を満たすランダムグラフの大きさについてⅡ，明治学院大学経済研究 162 (2021).
浜口幸弘，特定の次数列を満たすランダムグラフの大きさについてⅢ，明治学院大学経済研究 164 (2022).