『経済研究』（明治学院大学）第 171 号　2026 年

# スケールフリーグラフ再考 II

浜　口　幸　弘

## 1. はじめに

本稿は浜口（2025）の続編である．ここでは Cooper and Frieze（2003）の考え方に基づき，スケールフリーグラフを生成する preferential attachment，すなわち次数の大きさに応じた頂点の選択方法と一様ランダムな頂点の選択方法の 2 つを確率的に併せ持つような，Cooper and Frieze（2003）の理論を部分的に変更したモデルを対象にする．そして，生成されるグラフの辺の本数に関する性質を定理 1，定理 2 および定理 3 として導く．

## 2. 本稿のモデルの定義

スケールフリーグラフを生成する preferential attachment のモデル化は次のとおりである．既存のグラフ $G$ に新しい頂点を 1 個ずつ加えるとき，その頂点から $m$ 本の辺を頂点の次数の大きさに応じて確率的にグラフ $G$ に接続する．このとき，多重辺とループも認めるものとする．以下，具体的に $m$ の大きさで場合分けして考える．

$m=1$ の場合について，上記のことを定式化すると以下のようになる．既存のグラフ $G$ に追加していく頂点列を $v_1, v_2, \ldots$ と固定し，グラフ $G$ における頂点 $v$ の次数を $d_G(v)$ と記す（以下，$d(v)$ と略記）．そこでランダムグラフのプロセス $(G_1^t)_{t\geq 1}$ を次のように帰納的に定義すると，$\{v_i : 1\leq i\leq t\}$ 上のグラフ $G_1^t$ が構成される．すなわち，まず 1 個の頂点と 1 つのループを持つグラフ $G_1^1$ から出発する．そして，$G_1^{t-1}$ まで構成されたとき，次に追加する頂点 $v_t$ と $G_1^{t-1}$ 上の任意の頂点 $u$ を 1 本の辺で結ぶ．このとき，$G_1^{t-1}$ におけるすべての頂点の次数和は $2(t-1)$ なので，$t$ において確率変数 $u$ は次の式を満たす．

$$P(u=v_s)=d_{G_1^{t-1}}(v_s)/2(t-1) \qquad 1\leq s\leq t-1.$$

これは，Barabási and Albert（1999）のモデルを定式化したものであるが，本稿では，Cooper and Frieze（2003）と同様に，preferential attachment においては，追加する頂点 $v_t$ が次数の大きさに従っ

て $G_1^{t-1}$ 内の頂点をランダムに選択するものとし（ただし，$v_t$ 自身を選択することはない），このとき頂点の内次数と外次数の区別はしないものとする．すなわち，生成されるグラフは無向グラフである．また，$m>1$ の場合については，追加する頂点 $v_t$ から $m$ 本の辺が一度に $G_1^{t-1}$ に接続される．よって，プロセス $(G_m^t)$ については，プロセス $(G_1^{mt})$ において，最初の頂点から $m$ 個の頂点ごとに統合して 1 個の頂点にすれば $(G_m^t)$ が得られることになる．したがって，本稿では $mt$ を $t$ と置き換え，追加する頂点から 1 本の辺が既存のグラフに接続される $G_1^t$ グラフを扱うものとする．また簡単のため，頂点列 $v_1, v_2, \ldots$ を添え字のみで表し，$1, 2, \ldots$ と表記することもある．よって $G_1^t$ は，$[t] \subseteq \{1, 2, \ldots, mn\}$ 上のランダムグラフとなる．また，追加する頂点 $j$ が接続される既存のグラフ内の頂点を $g_j$ として表す．

本稿では，Cooper and Frieze（2003）のモデルを簡略化して以下のように考えるものとする．なお，できる限り Cooper and Frieze（2003）にある記号を用いるようにする．既存の生成グラフにおいては，頂点同士の接続は起こらないものとする．よって，Cooper and Frieze（2003）において，$\alpha=0$，$q_j=0$ $(j \geq 1)$，すなわち，$j_1=0$ である．そして，Cooper and Frieze（2003）と同様に，追加する頂点は確率 $\beta$ で生成グラフの 1 個の頂点を一様ランダムに選択，または，確率 $1-\beta$ で生成グラフの 1 個の頂点を次数の大きさに従いランダムに選択する（すなわち，preferential attachment）ものとする（ただし，$0 \leq \beta < 1$）．この点が当モデルの本質的な特徴である．

## 3. モデルの性質

さて，以下の補題では，グラフの構成プロセス $(G_1^t)$ を考えるので，$G_1^t$ は確率変数である．また，グラフ $G_1^t$ における頂点 $i$ の次数を $d_{t,i}=d_{G_1^t}(i)$ とし，その期待値を $E(d_{t,i})$ とする．なお，事象 $A$ が起こるとき 1，起こらないときに 0 の値をとる指示関数（indicator function）を $\mathrm{I}_A$ で表す．まず，以降の証明で用いる不等式に関する補題 1 を示す．

補題 1

$a$ は $0<a\leq 1$ を満たす定数であり，$i$ と $t$ は $t \geq i+1 \geq 2$ を満たす整数とする．このとき，以下の不等式が成り立つ．

$$\left(\frac{1}{2e^{1/2}}\right)^a \left(\frac{t}{i}\right)^a \leq \prod_{s=i+1}^{t} \left(1+\frac{a}{s-1}\right) \leq (2e^{1/2})^a \left(\frac{t}{i}\right)^a.$$

証明

まず，$\displaystyle\prod_{s=i+1}^{t}\left(1+\frac{a}{s-1}\right)=\exp\left(\log \prod_{s=i+1}^{t}\left(1+\frac{a}{s-1}\right)\right)$ なので，$\displaystyle\log \prod_{s=i+1}^{t}\left(1+\frac{a}{s-1}\right)$ の大きさを評価すると，以下のようになる．

$i \geq 2$ のとき，

$$\int_i^t \log\left(1+\frac{a}{x}\right)dx \leq \log \prod_{s=i+1}^{t}\left(1+\frac{a}{s-1}\right) \leq \int_{i-1}^{t-1} \log\left(1+\frac{a}{x}\right)dx.$$

$i=1$ のとき，下限の評価は上と同じで，上限は以下となる．

$$\log \prod_{s=i+1}^{t} \left(1+\frac{a}{s-1}\right) \leq \log(1+a) + \int_i^{t-1} \log\left(1+\frac{a}{x}\right) dx.$$

よって，これらの不等式に等式 $\int \log(x+a)\,dx = \log\left(\frac{x+a}{e}\right)^{x+a} + C$ を適用することにより，主張の不等式を得る． □

なお以下の補題 2 では，証明の過程において $t=i$ の場合も含めるが，$\prod_{s=i+1}^{t}\left(1+\frac{a}{s-1}\right)=1$ とすれば，上の不等式を満たすので，このように考えるものとする．

さて補題 1 を用いて，Bollobás and Riordan（2004）の定理を参考に（この論文では，$\beta=0$ の場合を扱っている），頂点の次数の大きさの期待値と分散，および 2 頂点間に辺が存在する確率の大きさを評価する次の補題を提示する．なお，事象 $A$ かつ $B$ が成り立つ確率を $P(A, B)$ として表すものとする．

補題 2

$\beta$ は $0 \leq \beta < 1$ を満たす任意の定数とする．

$(a)$ ある正の定数 $c_1$，$c_2$，$c_3$，$c_4$ に対して，$d_{t,i}$ の期待値 $E(d_{t,i})$ と分散 $V(d_{t,i})$ に関する以下の不等式が成り立つ．

$$c_1\left(\frac{t}{i}\right)^{(1-\beta)/2} \leq E(d_{t,i}) \leq c_2\left(\frac{t}{i}\right)^{(1-\beta)/2}.$$

$$c_3\left(\frac{t}{i}\right)^{1-\beta} \leq V(d_{t,i}) \leq c_4\left(\frac{t}{i}\right)^{1-\beta}.$$

$(b)$ $1 \leq i < j$ のとき，ある正の定数 $c_5$，$c_6$ に対して，以下の式が成り立つ．

$$c_5\left(\frac{1}{i}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{1}{j}\right)^{(1+\beta)/2} \leq P(g_i = i) \leq c_6\left(\frac{1}{i}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{1}{j}\right)^{(1+\beta)/2}.$$

$1 \leq i < j < k$ のとき，ある正の定数 $c_7$，$c_8$，$c_9$，$c_{10}$ に対して，以下の式が成り立つ．

$$c_9\left(\frac{1}{i}\right)^{1-\beta}\left(\frac{1}{jk}\right)^{(1+\beta)/2} \leq P(g_j = i, g_k = i) \leq c_{10}\left(\frac{1}{i}\right)^{1-\beta}\left(\frac{1}{jk}\right)^{(1+\beta)/2}.$$

$$c_7\frac{1}{j}\left(\frac{1}{i}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{1}{k}\right)^{(1+\beta)/2} \leq P(g_j = i, g_k = j) \leq c_8\frac{1}{j}\left(\frac{1}{i}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{1}{k}\right)^{(1+\beta)/2}.$$

$1 \leq i < j < k < r$ または $1 \leq i < k < j < r$ のとき，ある正の定数 $c_{11}$，$c_{12}$ に対して，以下の式が成り立つ．

$$c_{11}\left(\frac{1}{ik}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{1}{jr}\right)^{(1+\beta)/2} \leq P(g_j = i, g_r = k) \leq c_{12}\left(\frac{1}{ik}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{1}{jr}\right)^{(1+\beta)/2}.$$

証明

$(a)$ $t \geq 2$ かつ $0 \leq \beta < 1$ のとき，グラフの構成プロセス（$G_1^t$）の定義（注：$v_t$ 自身を選択することはない）から，以下となる．

$$P(g_t = i \mid G_1^{t-1}) = (1-\beta)\frac{d_{t-1,i}}{2(t-1)} + \beta\frac{1}{t-1} = \frac{(1-\beta)d_{t-1,i} + 2\beta}{2(t-1)}.$$

よって，$c_{t,i}=\ (1-\beta)d_{t,i}+2\beta$ とすると，以下となる．

$$P(g_t=i|G_1^{t-1})=\frac{c_{t-1,i}}{2(t-1)}. \tag{1}$$

この式の両辺の期待値をとることにより以下の式を得る．

$$P(g_t=i)=\frac{E(c_{t-1,i})}{2(t-1)}. \tag{2}$$

また，$t>i$ に対して，$d_{t,i}=d_{t-1,i}+\mathrm{I}_{\{g_t=i\}}$ となるから（注：$d_{i,i}=1$），

$$(1-\beta)d_{t,i}+2\beta=(1-\beta)d_{t-1,i}+2\beta+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_t=i\}}.$$

すなわち，$c_{t,i}=c_{t-1,i}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_t=i\}}$ となる．よって，式(1)から

$$E(c_{t,i}|G_1^{t-1})=c_{t-1,i}+(1-\beta)\frac{c_{t-1,i}}{2(t-1)}=\left(1+\frac{1-\beta}{2(t-1)}\right)c_{t-1,i}.$$

両辺の期待値をとると，

$$E(c_{t,i})=\left(1+\frac{1-\beta}{2(t-1)}\right)E(c_{t-1,i}). \tag{3}$$

ここで，$c_{i,i}=1+\beta$ であるから，

$$E(c_{t,i})=(1+\beta)\prod_{s=i+1}^{t}\left(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\right).$$

ただし，$t=i$ の場合，$\displaystyle\prod_{s=i+1}^{t}\left(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\right)=1$ とし，$E(c_{i,i})=(1+\beta)$ である（以降の議論でも，$\Pi$ 記号を用いるときは同様に考える）．よって補題 1 から以下を得る．

$$(1+\beta)\left(\frac{1}{2e^{1/2}}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{t}{i}\right)^{(1-\beta)/2}\leq E(c_{t,i})\leq(1+\beta)\,(2e^{1/2})^{(1-\beta)/2}\left(\frac{t}{i}\right)^{(1-\beta)/2}.$$

このとき，$E(d_{t,i})=\dfrac{E(c_{t,i})}{1-\beta}-\dfrac{2\beta}{1-\beta}$ であるから，補題 2（$a$）の最初の不等式を得る．次に，$c_{t,i}=c_{t-1,i}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_t=i\}}$ および式(1)を用いれば以下となる．

$$\begin{aligned}E({c_{t,i}}^2|G_1^{t-1})&=E\left((c_{t-1,i}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_t=i\}})^2|G_1^{t-1}\right)\\&={c_{t-1,i}}^2+2(1-\beta)c_{t-1,i}\cdot\frac{c_{t-1,i}}{2(t-1)}+(1-\beta)^2\frac{c_{t-1,i}}{2(t-1)}\\&=\left(1+\frac{1-\beta}{t-1}\right){c_{t-1,i}}^2+\frac{(1-\beta)^2}{2(t-1)}c_{t-1,i}.\end{aligned}$$

上式の期待値をとって以下となる．

$$E({c_{t,i}}^2)=\left(1+\frac{1-\beta}{t-1}\right)E({c_{t-1,i}}^2)+\frac{(1-\beta)^2}{2(t-1)}E(c_{t-1,i}).$$

式(3)の両辺に $1-\beta$ を掛けて上式の各辺に加えれば以下を得る．

$$E({c_{t,i}}^2)+(1-\beta)E(c_{t,i})=\Big(1+\frac{1-\beta}{t-1}\Big)\Big(E({c_{t-1,i}}^2)+(1-\beta)E(c_{t-1,i})\Big).$$

ここで，$c_{i,i}=1+\beta$ だから，

$$E({c_{t,i}}^2)+(1-\beta)E(c_{t,i})=2(1+\beta)\prod_{s=i+1}^{t}\Big(1+\frac{1-\beta}{s-1}\Big). \tag{4}$$

ただし，$E({c_{i,i}}^2)+(1-\beta)E(c_{i,i})=2(1+\beta)$ である．補題1を適用すれば，以下を得る．

$$2(1+\beta)\Big(\frac{1}{2e^{1/2}}\Big)^{1-\beta}\Big(\frac{t}{i}\Big)^{1-\beta}\le E({c_{t,i}}^2)+(1-\beta)E(c_{t,i})\le 2(1+\beta)\,(2e^{1/2})^{1-\beta}\Big(\frac{t}{i}\Big)^{1-\beta}.$$

よって，$V(d_{t,i})$ に関する不等式を得る．

$(b)$ $1\le i<j$ のとき，$P(g_j=i)$ の大きさを評価する．式(2)において，$t$ を $j$ とすれば，以下となる．

$$P(g_j=i)=\frac{E(c_{j-1,i})}{2(j-1)}.$$

ここで，$E(c_{t,i})$ に関する上述の不等式を適用すると，主張の最初の不等式を得る．

次に，$1\le i<j<k$ のとき，$P(g_j=i,g_k=i)$ の大きさを評価する．$i<j<t$ に対して，式(1)および $c_{t,i}=c_{t-1,i}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_t=i\}}$ を用いれば，以下となる．

$$\begin{aligned}E(c_{t,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}\,|\,G_1^{t-1})&=E\Big(c_{t-1,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_t=i\}}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}\,|\,G_1^{t-1}\Big)\\&=c_{t-1,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}E(\mathrm{I}_{\{g_t=i\}}\,|\,G_1^{t-1})\\&=\Big(c_{t-1,i}+\frac{(1-\beta)c_{t-1,i}}{2(t-1)}\Big)\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}.\end{aligned}$$

このとき，両辺の期待値をとって以下を得る．

$$\begin{aligned}E(c_{t,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})&=\Big(1+\frac{1-\beta}{2(t-1)}\Big)E(c_{t-1,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})=\cdots\\&=\prod_{r=j+1}^{t}\Big(1+\frac{1-\beta}{2(r-1)}\Big)E(c_{j,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}).\end{aligned} \tag{5}$$

ところで，式(1)を利用すれば，

$$\begin{aligned}E(c_{j,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}\,|\,G_1^{j-1})&=E\left((c_{j-1,i}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}\,|\,G_1^{j-1}\right)\\&=c_{j-1,i}\frac{c_{j-1,i}}{2(j-1)}+(1-\beta)\frac{c_{j-1,i}}{2(j-1)}=(c_{j-1,i}+1-\beta)\frac{c_{j-1,i}}{2(j-1)}\end{aligned}$$

となるので，両辺の期待値をとると，式(4)から以下を得る．

$$\begin{aligned}E(c_{j,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})&=\frac{1}{2(j-1)}(E({c_{j-1,i}}^2)+(1-\beta)E(c_{j-1,i}))\\&=\frac{1+\beta}{j-1}\prod_{s=i+1}^{j-1}\Big(1+\frac{1-\beta}{s-1}\Big).\end{aligned}$$

したがって，式(5)は以下となる．

$$E(c_{t,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})=\frac{1+\beta}{j-1}\prod_{s=i+1}^{j-1}\left(1+\frac{1-\beta}{s-1}\right)\prod_{r=j+1}^{t}\left(1+\frac{1-\beta}{2(r-1)}\right). \tag{6}$$

一方，$i<j<k$ に対して，

$$P(g_j=i, g_k=i|G_1^{k-1})=\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}P(g_k=i|G_1^{k-1})=\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}\frac{c_{k-1,i}}{2(k-1)}$$

となる．このとき，両辺の期待値をとると，

$$P(g_j=i, g_k=i)=\frac{1}{2(k-1)}E(c_{k-1,i}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}).$$

式(6)を利用すれば，以下を得る．

$$P(g_j=i, g_k=i)=\frac{1+\beta}{2(k-1)(j-1)}\prod_{s=i+1}^{j-1}\left(1+\frac{1-\beta}{s-1}\right)\prod_{r=j+1}^{k-1}\left(1+\frac{1-\beta}{2(r-1)}\right).$$

よって補題 1 から，以下となる．

$$\frac{1+\beta}{2(k-1)(j-1)}\left(\frac{1}{2e^{1/2}}\right)^{3(1-\beta)/2}\left(\frac{k-1}{j}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{j-1}{i}\right)^{1-\beta}\leq P(g_j=i, g_k=i)$$
$$\leq\frac{1+\beta}{2(k-1)(j-1)}(2e^{1/2})^{3(1-\beta)/2}\left(\frac{k-1}{j}\right)^{(1-\beta)/2}\left(\frac{j-1}{i}\right)^{1-\beta}.$$

ここで，$j\geq2$ および $k\geq3$ を考慮して近似すれば，主張の 2 番目の不等式を得る．同様に考えれば，主張の 3 番目の不等式が得られる．

次に，$1\leq i<j<k<r$ の場合，$P(g_j=i, g_r=k)=P(g_j=i)P(g_r=k)$ なので，最初の不等式から当該の不等式が得られる．

一方，$1\leq i<k<j<r$ の場合について考えると，まず以下の式を得る．

$$P(g_j=i, g_r=k|G_1^{r-1})=\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}P(g_r=k|G_1^{r-1})=\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}\frac{c_{r-1,k}}{2(r-1)}. \tag{7}$$

このとき，$i<k<j<t$ に対して，前述の議論と同様に考えれば，以下となる．

$$E(c_{t,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}|G_1^{t-1})=\left(1+\frac{1-\beta}{2(t-1)}\right)c_{t-1,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}.$$

よって，

$$E(c_{t,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})=\prod_{s=j+1}^{t}\left(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\right)\cdot E(c_{j,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}). \tag{8}$$

ここで，

$$\begin{aligned}E(c_{j,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}|G_1^{j-1})&=E\left((c_{j-1,k}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_j=k\}})\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}|G_1^{j-1}\right)\\&=c_{j-1,k}E(\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}|G_1^{j-1})+(1-\beta)E(\mathrm{I}_{\{g_j=k\}}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}}|G_1^{j-1})\end{aligned}$$

$$=\frac{c_{j-1,k}\,c_{j-1,i}}{2(j-1)}.$$

最後の等号は，$P(g_j=k, g_j=i)=0$ による．よって，以下を得る．

$$E(c_{j,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})=\frac{E(c_{j-1,k}\,c_{j-1,i})}{2(j-1)}. \tag{9}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
E(c_{j,k}\,c_{j,i}\,|\,G_1^{j-1}) &= E\Big((c_{j-1,k}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_j=k\}})\,(c_{j-1,i}+(1-\beta)\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})\,|\,G_1^{j-1}\Big)\\
&= c_{j-1,k}\,c_{j-1,i}+c_{j-1,k}\frac{(1-\beta)c_{j-1,i}}{2(j-1)}+c_{j-1,i}\frac{(1-\beta)c_{j-1,k}}{2(j-1)}\\
&= \Big(1+\frac{1-\beta}{j-1}\Big)c_{j-1,k}\,c_{j-1,i}.
\end{aligned}$$

よって，両辺の期待値をとり，$c_{k,k}=1+\beta$ に注意して以下を得る．

$$E(c_{j,k}\,c_{j,i})=(1+\beta)\prod_{s=k+1}^{j}\Big(1+\frac{1-\beta}{s-1}\Big)E(c_{k,i}). \tag{10}$$

したがって，(3)，(7)，(8)，(9)，(10) から以下を得る．

$$\begin{aligned}
P(g_j=i, g_r=k) &= \frac{1}{2(r-1)}E(c_{r-1,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})\\
&= \frac{1}{2(r-1)}\prod_{s=j+1}^{r-1}\Big(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\Big)\cdot E(c_{j,k}\mathrm{I}_{\{g_j=i\}})\\
&= \frac{1}{4(r-1)(j-1)}\prod_{s=j+1}^{r-1}\Big(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\Big)\cdot E(c_{j-1,k}\,c_{j-1,i})\\
&= \frac{1+\beta}{4(r-1)(j-1)}\prod_{s=j+1}^{r-1}\Big(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\Big)\prod_{s=k+1}^{j-1}\Big(1+\frac{1-\beta}{s-1}\Big)E(c_{k,i})\\
&= \frac{(1+\beta)^2}{4(r-1)(j-1)}\prod_{s=j+1}^{r-1}\Big(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\Big)\prod_{s=k+1}^{j-1}\Big(1+\frac{1-\beta}{s-1}\Big)\prod_{s=i+1}^{k}\Big(1+\frac{1-\beta}{2(s-1)}\Big).
\end{aligned}$$

ここで補題 1 により，以下を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+\beta)^2}{4(r-1)(j-1)}\Big(\frac{1}{2e^{1/2}}\Big)^{2(1-\beta)}\Big(\frac{r-1}{j}\Big)^{(1-\beta)/2}\Big(\frac{j-1}{k}\Big)^{1-\beta}\Big(\frac{k}{i}\Big)^{(1-\beta)/2}\leq P(g_j=i, g_r=k)\\
&\leq \frac{(1+\beta)^2}{4(r-1)(j-1)}(2e^{1/2})^{2(1-\beta)}\Big(\frac{r-1}{j}\Big)^{(1-\beta)/2}\Big(\frac{j-1}{k}\Big)^{1-\beta}\Big(\frac{k}{i}\Big)^{(1-\beta)/2}.
\end{aligned}$$

ここで，$k\geq 2$，$j\geq 3$ および $r\geq 4$ を考慮して近似すれば，主張の最後の不等式を得る． □

これ以降，グラフの生成過程において連続する追加頂点列 $v_1, v_2, \ldots$ を添え字のみで $1, 2, \ldots$ と表し，頂点列 $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ を数直線上の区間 $[i, j]$ 内に含まれるものとして扱う．そして，区間 $[1, a)$ に含ま

れる１つの頂点と区間［$a, b$）に含まれる１つの頂点を接続する辺の総本数を確率変数 $X$ とし，［$a, b$）に含まれる１つの頂点と［$b, mn$］に含まれる１つの頂点を接続する辺の総本数を確率変数 $Y$ とする．また，$b=a+\varDelta$ とし，$\varDelta$ は［$a, b$）に含まれる頂点数を表すものとする．

このとき，$E(XY/\varDelta)$ は区間［$a, b$）に含まれる１つの頂点当たり，区間外頂点と接続する辺の本数の積 $XY$ の期待値を意味する．すなわち，生成されるランダムグラフを何らかの情報伝達ネットワークとみなすと，$E(XY/\varDelta)$ は，対象とする $\varDelta$ 人（個）の集まりが情報媒介者（物）として，単位当たりどの位の情報量を平均して伝達するかを表す指標であり，ネットワークにおける情報伝達個体としての重要性を意味している．次の定理は，$\varDelta$（対象となる情報伝達の個体数）が与えられたとき，おおよそどの位の $a$（その個体数がネットワークに加入した相対的時期）のときに $E(XY/\varDelta)$ が最大となるかを示したものである．

定理１

区間［$1, a$）に含まれる１つの頂点と区間［$a, b$）に含まれる１つの頂点を接続する辺の総本数を $X$ とし，［$a, b$) に含まれる１つの頂点と [b, $mn$] に含まれる１つの頂点を接続する辺の総本数を $Y$ とする．また，$b=a+\varDelta$ とし，$\varDelta$ は［$a, b$）に含まれる頂点数を表す．このとき，ある正の定数 $k_1$，$k_2$ に対して，$k_1 \dfrac{f(a)}{\varDelta} \leq E\left(\dfrac{XY}{\varDelta}\right) \leq k_2 \dfrac{f(a)}{\varDelta}$ を満たす関数 $f(a)$ が存在し，$f(a)$ は以下の性質を満たす．ただし，$a \geq 2$ であり，$\lambda$ は $\lambda \geq 10$ を満たす任意の定数であり，$\sigma=\sigma(n)$ は $n \to \infty$ のとき，$\sigma \to \infty$ かつ $\sigma=o(n/\varDelta)$ となる $n$ の任意の関数とする．また，任意の正の実数 $r$ に対して，$\log\log n \leq \varDelta \leq (\log n)^r$ とする．

（ｉ）$\dfrac{\varDelta}{\lambda} \leq a \leq \lambda\varDelta$ において，$f(a)$ の最小値を $f_{min}$，最大値を $f_{max}$ とするとき，以下の不等式が成り立つ．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{min}}{f_{max}} > 0.$$

（ii）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f(\varDelta/(\lambda\sigma))}{f(\varDelta/\lambda)} = 0$ であり，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f(\sigma\lambda\varDelta)}{f(\lambda\varDelta)} = 0$ である．

証明

数直線上の頂点 $i$ と頂点 $j$ の間を結ぶ辺の存在を表す指示関数を $\mathrm{I}_{\{i,j\}}$ と表す．すなわち，

$$\mathrm{I}_{\{i,j\}} = \begin{cases} 1, & i\text{と}j\text{を結ぶ辺が存在する場合} \\ 0, & \text{そうでない場合} \end{cases}$$

とする．そして，頂点 $i$ が［$1, a$）に含まれ，頂点 $k$ と頂点 $j$ が［$a, b$）に含まれ，頂点 $r$ が［$b, mn$］に含まれるとき，$j$ から $i$ への辺の接続の有無および $r$ から $k$ への辺の接続の有無を考えると，以下のように確率変数 $X$ と $Y$ を表せる．

$$X = \textstyle\sum_{1 \leq i \leq a-1, a \leq j \leq b-1} \mathrm{I}_{\{i,j\}}, \quad Y = \sum_{a \leq k \leq b-1, b \leq r \leq mn} \mathrm{I}_{\{k,r\}}.$$

このとき，

$$E\left(\frac{XY}{\varDelta}\right) = \frac{1}{\varDelta} \sum_{i,j,k,r} P(g_j = i, g_r = k)$$

である．

ここで，以下のように関数 $f(a)$ を定義する．ただし，$m$ は正の定数（1つの頂点から出てゆく辺の本数，既述）である．

$$f(a)=\left(\left(\frac{1}{1}\right)^{(1-\beta)/2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{(1-\beta)/2}+\cdots+\left(\frac{1}{a-1}\right)^{(1-\beta)/2}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{(1-\beta)/2}+\left(\frac{1}{a+1}\right)^{(1-\beta)/2}+\cdots+\left(\frac{1}{b-1}\right)^{(1-\beta)/2}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{(1+\beta)/2}+\left(\frac{1}{a+1}\right)^{(1+\beta)/2}+\cdots+\left(\frac{1}{b-1}\right)^{(1+\beta)/2}\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{b}\right)^{(1+\beta)/2}+\left(\frac{1}{b+1}\right)^{(1+\beta)/2}+\cdots+\left(\frac{1}{mn}\right)^{(1+\beta)/2}\right).$$

このとき補題2(b)から，ある正の定数 $k_1$，$k_2$ に対して，以下を得る．

$$k_1\frac{f(a)}{\varDelta}\leq E\left(\frac{XY}{\varDelta}\right)\leq k_2\frac{f(a)}{\varDelta}.$$

そこで，$a$ の大きさについて場合分けして考える．ただし，$b=a+\varDelta$ であり，$\varepsilon$ と $\varepsilon'$ は以下とする．

$$\varepsilon=\frac{1-\beta}{2},\ \varepsilon'=\frac{1+\beta}{2},\ 0<\varepsilon\leq\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\leq\varepsilon'<1.$$

また，$f(a)$ の近似値を評価する式として，$s\geq 2$ のとき，

$$\frac{1}{1-\varepsilon}\left((t+1)^{1-\varepsilon}-s^{1-\varepsilon}\right)\leq\sum_{k=s}^{t}\left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon}\leq\frac{1}{1-\varepsilon}\left(t^{1-\varepsilon}-(s-1)^{1-\varepsilon}\right)\quad\text{：}\varepsilon'\text{の場合も同様}$$

を適用し，以下の各場合に応じてさらに近似評価する．

Case1: $\dfrac{\varDelta}{\lambda}\leq a\leq\varDelta$.

$f(a)$ の下限 $f_1^-(a)$ と上限 $f_1^+(a)$ は以下のようになる．

$$f(a)\geq\frac{1}{5(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon')^2}a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon}-a^{1-\varepsilon})(b^{1-\varepsilon'}-a^{1-\varepsilon'})((mn)^{1-\varepsilon'}-b^{1-\varepsilon'})$$
$$\geq c_1a^{1-\varepsilon}\left(\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\varDelta\right)^{1-\varepsilon}-\varDelta^{1-\varepsilon}\right)\left(\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\varDelta\right)^{1-\varepsilon'}-\varDelta^{1-\varepsilon'}\right)((mn)^{1-\varepsilon'}-(2\varDelta)^{1-\varepsilon'})$$
$$\geq c_2a^{1-\varepsilon}\varDelta((mn)^{1-\varepsilon'}-(2\varDelta)^{1-\varepsilon'}).$$

最後の式を $f_1^-(a)$（単調増加）とする．なお，最初の不等式では，$(a+1)^{1-\varepsilon}-1\geq\dfrac{a^{1-\varepsilon}}{5}$ を利用している．また，$c_1$ と $c_2$ は定数である．

$$f(a)\leq\frac{1}{(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon')^2}a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon}-(a-1)^{1-\varepsilon})(b^{1-\varepsilon'}-(a-1)^{1-\varepsilon'})((mn)^{1-\varepsilon'}-(b-1)^{1-\varepsilon'})$$
$$\leq c_3a^{1-\varepsilon}(2\varDelta)^{1-\varepsilon}(2\varDelta)^{1-\varepsilon'}(mn)^{1-\varepsilon'}=c_4a^{1-\varepsilon}\varDelta(mn)^{1-\varepsilon'}.$$

最後の式を $f_1^+(a)$（単調増加）とする．また，$c_3$ と $c_4$ は定数である．よって，この区間における $f(a)$ の最大値を $f_{max,1}$ とし，最小値を $f_{min,1}$ とすると，以下を得る．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{min,1}}{f_{max,1}} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{f_1^-(\varDelta/\lambda)}{f_1^+(\varDelta)} = \lim_{n\to\infty}\frac{c_2}{c_4}\cdot\frac{(\varDelta/\lambda)^{1-\varepsilon}}{\varDelta^{1-\varepsilon}}\cdot\frac{(mn)^{1-\varepsilon'}-(2\varDelta)^{1-\varepsilon'}}{(mn)^{1-\varepsilon'}} > 0.$$

Case2: $\varDelta \leq a \leq \lambda\varDelta$.

$$\begin{aligned}
f(a) &\geq \frac{1}{5(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon')^2}a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon}-a^{1-\varepsilon})(b^{1-\varepsilon'}-a^{1-\varepsilon'})((mn)^{1-\varepsilon'}-b^{1-\varepsilon'})\\
&\geq c_5 a^{1-\varepsilon}\cdot\frac{(2^{1-\varepsilon}-1)\varDelta}{a^{\varepsilon}}\cdot\frac{(2^{1-\varepsilon'}-1)\varDelta}{a^{\varepsilon'}}\cdot((mn)^{1-\varepsilon'}-(a+\varDelta)^{1-\varepsilon'})\\
&= c_6\frac{\varDelta^2}{a^{\varepsilon}}((mn)^{1-\varepsilon'}-(a+\varDelta)^{1-\varepsilon'}).
\end{aligned}$$

最後の式を $f_2^-(a)$（単調減少）とする．なお，2 番目の不等式では，$0<\alpha<1$ かつ $0<x\leq 1$ のとき，以下の不等式が成り立つことを $b^{1-\varepsilon}-a^{1-\varepsilon}$ および $b^{1-\varepsilon'}-a^{1-\varepsilon'}$ に適用している．

$$(2^{\alpha}-1)x+1 \leq (1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x.$$

また，$c_5$ と $c_6$ は定数である．

$$\begin{aligned}
f(a) &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon')^2}a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon}-(a-1)^{1-\varepsilon})(b^{1-\varepsilon'}-(a-1)^{1-\varepsilon'})\\
&\times((mn)^{1-\varepsilon'}-(b-1)^{1-\varepsilon'})\\
&\leq \frac{4}{(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon')^2}a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon}-a^{1-\varepsilon})(b^{1-\varepsilon'}-a^{1-\varepsilon'})((mn)^{1-\varepsilon'}-(a+\varDelta-1)^{1-\varepsilon'})\\
&\leq c_7 a^{1-\varepsilon}\cdot\frac{(1-\varepsilon)\varDelta}{a^{\varepsilon}}\cdot\frac{(1-\varepsilon')\varDelta}{a^{\varepsilon'}}\cdot((mn)^{1-\varepsilon'}-(a+\varDelta-1)^{1-\varepsilon'})\\
&\leq c_8\frac{\varDelta^2}{a^{\varepsilon}}((mn)^{1-\varepsilon'}-(a+\varDelta-1)^{1-\varepsilon'}).
\end{aligned}$$

最後の式を $f_2^+(a)$（単調減少）とする．なお，2 番目と 3 番目の不等式では，上記の不等式を利用している．また，$c_7$ と $c_8$ は定数である．よって，この区間における $f(a)$ の最大値を $f_{max,2}$ とし，最小値を $f_{min,2}$ とすると，以下を得る．

$$\lim\frac{f_{min,2}}{f_{max,2}} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{f_2^-(\lambda\varDelta)}{f_2^+(\varDelta)} = \lim_{n\to\infty}\frac{c_6}{c_8}\cdot\frac{\varDelta^{\varepsilon}}{(\lambda\varDelta)^{\varepsilon}}\cdot\frac{(mn)^{1-\varepsilon'}-((1+\lambda)\varDelta)^{1-\varepsilon'}}{(mn)^{1-\varepsilon'}-(2\varDelta-1)^{1-\varepsilon'}} > 0.$$

以上のことと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_2^+(\varDelta)}{f_1^+(\varDelta)}$ が正の定数であることを考慮すれば，（ i ）を得る．

Case3: $a \leq \dfrac{\varDelta}{\lambda}$.

$$f(a) \geq c_9 a^{1-\varepsilon}((a+\varDelta)^{1-\varepsilon}-a^{1-\varepsilon})((a+\varDelta)^{1-\varepsilon'}-a^{1-\varepsilon'})((mn)^{1-\varepsilon'}-(a+\varDelta)^{1-\varepsilon'})$$

$$\geq c_9 a^{1-\varepsilon}\left(\Delta^{1-\varepsilon}-\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^{1-\varepsilon}\right)\left(\Delta^{1-\varepsilon'}-\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^{1-\varepsilon'}\right)\left((mn)^{1-\varepsilon'}-\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\Delta\right)^{1-\varepsilon'}\right)$$

$$\geq c_{10} a^{1-\varepsilon}\Delta\left((mn)^{1-\varepsilon'}-\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\Delta\right)^{1-\varepsilon'}\right).$$

最後の式を $f_3^-(a)$ とする．また，$c_9$ と $c_{10}$ は定数である．

$$f(a)\leq c_{11}a^{1-\varepsilon}((a+\Delta)^{1-\varepsilon}-(a-1)^{1-\varepsilon})((a+\Delta)^{1-\varepsilon'}-(a-1)^{1-\varepsilon'})$$
$$\times\left((mn)^{1-\varepsilon'}-(b-1)^{1-\varepsilon'}\right)$$
$$\leq c_{12}a^{1-\varepsilon}\Delta(mn)^{1-\varepsilon'}.$$

最後の式を $f_3^+(a)$ とする．また，$c_{11}$ と $c_{12}$ は定数である．よって，以下を得る．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\Delta/(\lambda\sigma))}{f(\Delta/\lambda)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{f_3^+(\Delta/(\lambda\sigma))}{f_3^-(\Delta/\lambda)}=0.$$

Case4: $\lambda\Delta\leq a$.

$f(a)$ は，$\Delta\leq a\leq\lambda\Delta$ の場合と同じ下限と上限になる．すなわち，下限 $f_4^-(a)$ と上限 $f_4^+(a)$ を $f_4^-(a)=f_2^-(a)$，$f_4^+(a)=f_2^+(a)$ のようにすれば，以下となる．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\sigma\lambda\Delta)}{f(\lambda\Delta)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{f_4^+(\sigma\lambda\Delta)}{f_4^-(\lambda\Delta)}=0.$$

以上のことから（ⅱ）を得る． □

定理１からわかることは以下である．$\Delta/\lambda\leq a\leq\lambda\Delta$ において，$E(XY/\Delta)$ の値は大きく変動しない（$n\to\infty$のとき，最大値に対する最小値の比はある正の定数より大という意味で）こと，および，この区間の外では $a$ の値が $\Delta$ から離れるにつれ $E(XY/\Delta)$ の値は急激に小さくなることから，$E(XY/\Delta)$ の値を最大にする $a$ の値は，$\Delta/\lambda\leq a\leq\lambda\Delta$ を満たすことが示唆される．さらに，$a$ のとりうる範囲において，$E(XY/\Delta)$ の下限と上限はともに $a=\Delta$ で最大になることから，$E(XY/\Delta)$ も $a=\Delta$ の付近（$\beta$ に依存しないに注意）で最大となることが推測される．このとき推測される最大値は $\Delta^{(1+\beta)/2}n^{(1-\beta)/2}$ と同じオーダーである．

次に，区間 $[a,b)$ に含まれる１つの頂点当たり，区間外の頂点と接続する辺の本数の期待値 $E((X+Y)/\Delta)$ についても同様の考察をする．なお，この定理でも，定理１の証明で定義した記号を用いるものとする．

定理２

ある正の定数 $k_1$，$k_2$ に対して，$k_1\dfrac{g(a)}{\Delta}\leq E\left(\dfrac{X+Y}{\Delta}\right)\leq k_2\dfrac{g(a)}{\Delta}$ を満たす関数 $g(a)$ が存在し，$g(a)$ は以下の性質を満たす．ただし，$a\geq 2$ であり，$\lambda$ は $\lambda\geq 10$ を満たす任意の定数であり，$\sigma=\sigma(n)$ は $n\to\infty$のとき，$\sigma\to\infty$ かつ $\sigma=o(n/\Delta)$ となる $n$ の任意の関数とする．また，任意の正の実数 $r$ に対して，$\log\log n\leq\Delta\leq(\log n)^r$ とする．

（ｉ）$\frac{\Delta}{\lambda} \leq a \leq \lambda\Delta$において，$g(a)$ の最小値を $g_{min}$，最大値を $g_{max}$ とするとき，以下の不等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_{min}}{g_{max}} > 0$$

（ii）$\lim_{n\to\infty} \frac{g(\Delta/(\lambda\sigma))}{g(\Delta/\lambda)} > 0$ であり，$\lim_{n\to\infty} \frac{g(\sigma\lambda\Delta)}{g(\lambda\Delta)} = 0$ である．

証明

証明の手順は定理 1 と同様なので，その概略だけを示す．

まず，$g(a)$ を次のように定めると，

$$g(a) = \sum_{i=1}^{a-1}\left(\frac{1}{i}\right)^{\varepsilon}\sum_{i=a}^{b-1}\left(\frac{1}{i}\right)^{\varepsilon'} + \sum_{i=a}^{b-1}\left(\frac{1}{i}\right)^{\varepsilon}\sum_{i=b}^{mn}\left(\frac{1}{i}\right)^{\varepsilon'}$$

定理 1 の証明と同様，ある正の定数 $k_1$，$k_2$ に対して，以下を得る．

$$k_1\frac{g(a)}{\Delta} \leq E\left(\frac{X+Y}{\Delta}\right) \leq k_2\frac{g(a)}{\Delta}.$$

以下では，Case1 と Case2 の場合のみ，その概略を示す．

Case1: $\frac{\Delta}{\lambda} \leq a \leq \Delta$

正の定数 $c_1$，$c_2$ に対して，以下を得る．

$$\begin{aligned} g(a) &\geq c_1\left(a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon'} - a^{1-\varepsilon'}) + (b^{1-\varepsilon} - a^{1-\varepsilon})((mn)^{1-\varepsilon'} - b^{1-\varepsilon'})\right) \\ &\geq c_2\left(a^{1-\varepsilon}\Delta^{1-\varepsilon'} + \Delta^{1-\varepsilon}((mn)^{1-\varepsilon'} - (2\Delta)^{1-\varepsilon'})\right). \end{aligned}$$

最後の式を $g(a)$ の下限として $g_1^-(a)$ とする．

正の定数 $c_3$，$c_4$ に対して，以下を得る．

$$\begin{aligned} g(a) &\leq c_3\left(a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon'} - (a-1)^{1-\varepsilon'}) + (b^{1-\varepsilon} - (a-1)^{1-\varepsilon})((mn)^{1-\varepsilon'} - (b-1)^{1-\varepsilon'})\right) \\ &\leq c_4(a^{1-\varepsilon}\Delta^{1-\varepsilon'} + \Delta^{1-\varepsilon}n^{1-\varepsilon'}). \end{aligned}$$

最後の式を $g(a)$ の上限として $g_1^+(a)$ とする．

Case2: $\Delta \leq a \leq \lambda\Delta$.

正の定数 $c_5$，$c_6$ に対して，以下を得る．

$$\begin{aligned} g(a) &\geq c_5\left(a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon'} - a^{1-\varepsilon'}) + (b^{1-\varepsilon} - a^{1-\varepsilon})((mn)^{1-\varepsilon'} - b^{1-\varepsilon'})\right) \\ &\geq c_6\left(\Delta + \frac{\Delta}{a^{\varepsilon}} \cdot ((mn)^{1-\varepsilon'} - (a+\Delta)^{1-\varepsilon'})\right) \end{aligned}$$

最後の式を $g(a)$ の下限として $g_2^-(a)$ とする．

正の定数 $c_7$，$c_8$ に対して，以下を得る．

$$g(a) \leq c_7\Big(a^{1-\varepsilon}(b^{1-\varepsilon'}-(a-1)^{1-\varepsilon'})+(b^{1-\varepsilon}-(a-1)^{1-\varepsilon})((mn)^{1-\varepsilon'}-(b-1)^{1-\varepsilon'})\Big)$$
$$\leq c_8\Big(\varDelta+\frac{\varDelta}{a^{\varepsilon}}\cdot((mn)^{1-\varepsilon'}-(a+\varDelta-1)^{1-\varepsilon'})\Big).$$

最後の式を $g(a)$ の上限として $g_2^+(a)$ とする.

あとは，定理1と同様に考えて，主張が示される. □

$E((X+Y)/\varDelta)$ についても，その値を最大にする $a$ の値は，$\varDelta/\lambda \leq a \leq \lambda\varDelta$ を満たすことが示唆される．さらに，前述の定理と一部違って，区間〔2，$\lambda\varDelta$〕では $E((X+Y)/\varDelta)$ は大きな変化をしないと考えられる．また，このとき推測される最大値は $(n/\varDelta)^{(1-\beta)/2}$ と同じオーダーである.

さらに，$a$ と $\varDelta$ の大きさに一定の関係があると，両端点が区間 $[a, b)$ に含まれる辺がほとんど存在しない事実を定理3として導ける.

定理3

両端点が区間 $[a, b)$ に含まれる辺の総本数を $Z$ とする．このとき，$a \geq 2$ および正の定数 $c$ に対して，以下の式が成り立つ.

$$E(Z) \leq c((b-1)^{1-\varepsilon}-(a-1)^{1-\varepsilon})((b-1)^{1-\varepsilon'}-(a-1)^{1-\varepsilon'}).$$

また，$\varDelta^2 = o(a)$ のとき，ほとんどすべてのランダムグラフにおいて，$Z=0$ である.

証明

定理1の証明と同様に考えれば，正の定数 $c$ に対して，以下となる.

$$E(Z) \leq \sum_{i=a}^{b-1}\Big(\frac{1}{i}\Big)^{\varepsilon}\sum_{i=a}^{b-1}\Big(\frac{1}{i}\Big)^{\varepsilon'}$$
$$\leq c((b-1)^{1-\varepsilon}-(a-1)^{1-\varepsilon})((b-1)^{1-\varepsilon'}-(a-1)^{1-\varepsilon'}).$$

$\varDelta^2 = o(a)$ のとき,

$$E(Z) \leq 4c(b^{1-\varepsilon}-a^{1-\varepsilon})(b^{1-\varepsilon'}-a^{1-\varepsilon'})$$
$$\leq 4c\,\frac{(1-\varepsilon)\varDelta}{a^{\varepsilon}}\cdot\frac{(1-\varepsilon')\varDelta}{a^{\varepsilon'}} = 4c(1-\varepsilon)(1-\varepsilon')\frac{\varDelta^2}{a} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Markov の不等式から，$P(Z \geq 1) \to 0$．よって主張は示された. □

定理3から，$\varDelta^2$ が $a$ より十分小さい場合には，生成されるほとんどのランダムグラフにおいて，両端点が区間 $[a, b)$ に含まれる辺は存在しないことがわかる．また，この性質は $\beta$ に依存していない.

## 参考文献


A. Barabási, and R. Albert, *Emergence of scaling in random networks,* Science 286 (1999).

B. Bollobás and O. Riordan, “The diameter of a scale-free random graph”, *Combinatorica* (2004).

A.D. Broido and A. Clauset, *Scale-free networks are rare,* Nature communications (2019).

C. Cooper and A. Frieze, *A general model of web graphs,* Random Structures & Algorithms, Wiley On-

line Library (2003).
浜口幸弘，スケールフリーグラフ再考Ⅰ，明治学院大学経済研究（2025).