リアル・オプションズ・アプローチにおける確率計算

増山　幸一
明治学院大学経済学部

Discussion Paper 08-02

2008 年 4 月

目 次

1 始めに

Brennan and Schwartz(1985) が鉱物資源開発投資プロジェクトの評価をオプション価格理論に基づいて説明して以降、そして、McDonald and Siegel(1985, 86) によって操業停止オプションと投資プロジェクトのタイミング・オプションの評価問題が Black-Scholes-Merton の枠組み上で定式化されて以降、投資プロジェクトの評価問題をオプション価格付けの理論を用いて説明する研究が急進展してきた．ファイナンスの理論で発達してきたオプション価格付けの理論を実物投資問題に応用するアプローチをリアル・オプションズ・アプローチと呼んでいる．Dixit and Pindyck(1994) は、90 年代初頭までに行なわれたリアル・オプションズ・アプローチに基づく研究を整理している。その後の研究の進展は Trigeorgis(1996)、Brennan and Trigeorgis(2000)、Smit and Trigeorgis(2004) などにおいて説明されている．

リアル・オプションズ・アプローチで採用される分析手法は、ファイナンス理論で急速に発展してきた数学的手法に多くを依存している．また、現代ファイナンス理論での最新の数学的分析手法は現代確率過程論での急速な進歩を背景として展開されている[1]．そのことの故に、ファイナンス理論の展開に親しんでいない研究者や経済学専攻の大学院生にとって、リアル・オプションズ・アプローチを習得する上で大きな障壁が立ちはだかっている．本稿では、ルベーグ測度論の知識を前提とせず、さらに、ファイナンス理論におけるオプション価格付けの理論も前提とせず、リアル・オプションズ・アプローチの定式化において必須の諸概念や手法の数学的な理論をコンパクトかつ簡易に解説し、それらの手法が各種のリアル・オプションの事例においてどのように適用できるのかを説明する．総じて、リアル・オプションズ・モデルのより一般的な定式化の方法を提案する．

最初に、第 2 節で、ファイナンス理論で必須とされている確率過程論の数学的な基礎的概念を説明する．特にブラウン運動によって駆動される拡散過程を表現する確率微分方程式の概念、それを解くために必要な伊藤積分と伊藤微分 (伊藤の公式) を主として説明する．ファイナンス理論での最先端的な理論研究を続けるためには、確率過程論の全体像を理解することが必要で、例えば、Karatzas and Shreve(1991)、Revuz and Yor(1991) やØksendal(2005) などの専門書を理解しておくことが必要であるが、本稿では、確率過程論の基礎知識を前提とすることなく、確率計算に関わる基礎知識を必要最小限のレベルで自己完結的に提供する[2]．

リアル・オプションズの対象となるほとんどすべての投資問題は確率的最適制御問題として定式化される．確率的最適化問題を解く一般的な手法は動的計画法を応用することである．動的計画法の応用では、価値関数が満たすべき偏微分方程式（通常、ハミルトン-ヤコビの方程式あるいは、ベルマン方程式と呼ばれている）を導出することが涵養となっている．第 3 節で、確率的最適制御問題の解法に必要な基本方程式であるハミルトン-ヤコビ - ベルマンの偏微分方程式を導出する．

次に、第 3 節で、Black-Scholes-Merton モデルと呼ばれる枠組み内で、デリバティブの価格がどのように評価されるべきかについて説明する．このときの基本的な前提条件は裁定機会が存在しないという条件である．簡単な例に対する手法を展開した後、リアル・オプションズ・モデルで使用される問題に対して応用できるような形に、Black-Scholes-Merton モデルを拡張する．

第 4 節以降で、リアル・オプションの代表的な幾つかの事例を取り上げ、これらの問題をコンパクトに定

[1] 1980 年代までは、確率過程論の大学院学生向けの代表的なテキストは Doob(1953) や Karlin and Taylor(1975, 81) などであった．1980 年代以降、ファイナンス理論の進展と平行して、ブラウン運動と確率微分方程式を主として取り扱う確率過程論の専門書が多く登場することになる．その代表的なテキストは Chung and Williams(1983)、Karatzas and Shreve(1988)、Øksendal(1985)、Protter(1990) などであり、これらは多くの改訂版を重ねている．また、幾何ブラウン運動と確率微分方程式を基礎とした連続時間数理ファイナンスの代表的なテキストは、Duffie(1992)、Musiela and Rutkowski(1997) および Karatzas and Shreve(1998) などである．

[2] Karatzas and Shreve(1991) などの確率過程論のテキストを十全に理解することは、ルベーグ測度論に熟知した研究者でない限り、非常に難しいと思われる．なお、数学的な背景としてルベーグ測度論などの基礎知識を前提としていない代表的なテキストとして、Neftci(2000) および Shreve(2004) などがあるので、それらを参考にすると良い．

式化して、それらのリアル・オプション問題の解析手法を説明する．これらの事例は互いに独立したもので、それぞれ独立に理解することができる．表記法も各事例ごとに独立しているので、各事例ごとの表記に注意してください．

2 拡散過程と確率微分方程式

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考える．$\mathscr{S}$ を分離可能な完備距離空間とする．ある関数 x が Ω から空間 $\mathscr{S}$ への写像であり、σ 代数族 $\mathcal{F}$ に関して可測であると同時に、$\mathscr{S}$ のボレル集合族 $\mathscr{B}(\mathscr{S})$ に関しても可測であるならば、関数 x は確率ベクトルの定義を満たす．通常、$\mathscr{S} = R^n$ とする．確率過程 ξ は、パラメター集合 $\mathscr{T}$ に属する時刻 t に対して確率ベクトル $\xi(t,\cdot)$ を対応させるものである．時刻の集合 $\mathscr{T}$ は通常 1 次元実数空間 R^1 の部分集合である．ここでは、時刻の集合 $\mathscr{T}$ は実数のコンパクトな区間とし、$[t_0, t_1]$ あるいは $[0, T]$ と表現する．こうして、確率過程 $\xi = \xi(\cdot,\cdot)$ は直積集合 $\mathscr{T} \times \Omega$ から集合 $\mathscr{S}$ への写像となっている．集合 $\mathscr{S}$ は確率過程の状態空間と呼ばれている．$\xi(\cdot, \omega)$ が Ω のほとんどすべての点に対して $\mathscr{T}$ 上で連続ならば、確率過程 ξ は連続な確率過程と言われる．関数 $\xi(\cdot,\omega)$ は確率過程 ξ のサンプル関数と言われる．したがって、確率過程の連続性はサンプル関数の連続性を含意する．

パラメター集合 $\mathscr{T}$ の任意な各時刻、$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ に対して、確率ベクトル

$$\xi(s_0), \xi(s_1) - \xi_(s_0), \ldots, \xi(s_m) - \xi(s_{m-1})$$

が独立であるならば、確率過程 ξ は独立な増分 (independent increments) を持つという．独立増分を持つ定型的な確率過程の一つはブラウン運動である．以下にブラウン運動の定義を示す[3]．

定義 2.1 (**ブラウン運動**)
以下の条件を満たす 1 次元確率過程 w をブラウン運動という．

(1). ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して、$w(t_0) = 0$ である．

(2). w は定常的な独立増分を持つ．

(3). 増分 $w(t) - w(s)$ は、任意の $t, s \in \mathscr{T}$ に対して、平均値ゼロ、分散 $\sigma^2|t-s|$ を持つ正規分布となる．

(4). ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して、サンプル経路 $w(t)$ は時間に関して連続である．

上記の条件で、σ は正の定数である．$\sigma = 1$ のとき、標準ブラウン運動という．良く知られているように、ブラウン運動はマーティンゲールである．つまり、

$$E[w(t)|\mathcal{F}(s)] = w(s),\ 0 \leq s \leq t$$

が成り立つ．ただし、$\mathcal{F}(s)$ はブラウン運動のフィルトレーション (時刻 s までに実現されたブラウン運動のサンプル経路から生成される σ 代数) である．$E[\,\cdot\,|\mathcal{F}(s)]$ は $\mathcal{F}(s)$ のもとでの条件付期待値オペレータで

[3] この定義は、Lipster and Shiryayev(1977) による．ブラウン運動 (Brownian motion) は別名ウイーナー過程 (Wiener process) とも言われる．厳密に言うと、ウイーナー過程の定義は異なっているが、Levy の定理によってこれらは等価な確率過程であることが証明できる．詳しくは、Lipster and Shiryayev(1977) を参照してください．

ある．また、ブラウン運動の 2 次変分[4]は

$$\langle w, w\rangle(t) = \sigma^2 t$$

となるので、直感的には

$$dw(t)dw(t) = \sigma^2 dt$$

と表現される．ブラウン運動の 2 次変分がゼロにならない性質が確率計算上で重要な帰結をもたらす．さらに、ブラウン運動のサンプル関数は連続であるが、微分可能ではない．この微分不可能性は、ブラウン運動を含めて確率過程を微分方程式で表現しようとするとき、特異な問題を発生させる．伊藤清を含めた数学者たちがこの問題を解決するための概念および解析手法を開発してきた．$\phi(t),\ t \geq 0$ をフィルトレーション $\mathcal{F}(t)$ に適合した関数 ($\mathcal{F}(t)$ に関して可測な関数) とし、

$$E\int_0^T \phi(t)^2 dt < \infty$$

が成立するとする．ただし、T は確率過程の終端時刻とする．このとき、

$$I(t) = \int_0^t \phi(u)dw(u)$$

と表現される確率積分が定義できる．通常、伊藤清氏によって提案された定義が使用されている[5]．確率積分は以下の性質を持つ．

(1)．$I(t)$ は時間 t に関して連続である．

(2)．$I(t)$ は $\mathcal{F}(t)$ に関して可測である．

(3)．$I(t)$ はマーティンゲールである．

(4)．$EI(t) = 0,\ EI^2(t) = E\int_0^t \phi^2(u)du$ ．

(5)．$\langle I, I\rangle(t) = \int_0^t \phi^2(u)du$ ．

確率過程 ξ が確率積分を含む積分方程式

$$\xi(t) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^t \beta(r)dr + \int_{t_0}^t \gamma(r)dw(r),\ t \in \mathscr{T} \quad (1)$$

[4]確率過程 $\{x\}$ の二次変分 (quadratic variation) は

$$\langle x, x\rangle(t,\omega) = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{t_k \leq t} |x(t_{k+1},\omega) - x(t_k,\omega)|^2,\ \text{in Probability}$$

と定義される．ただし、$0 = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n = t,\ \Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ である．厳密な定義については、Chung and Williams(1990)、Karatzas and Shreve(1991) あるいは Protter(1990) などを参照してください．

[5]ϕ が近似式

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) 1_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n})}(t)$$

で近似できるとき、

$$\int_0^t \phi(u)dw(u) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega)[w(t_{j+1},\omega) - w(t_j,\omega)]$$

と定義される．ただし、$t_k \leq t$ のとき $t_k = t_k^n = k2^{-n}$、$t_k > t$ のとき $t_k = t$ とする．確率積分の厳密な定義およびその性質に関しては、Øksendal(1985)、Chung and Williams(1990) あるいは Protter(1990) を参照してください．

で表現されているとする．ただし、$\beta(t),\ \gamma(t)$ は

$$E\int_{t_0}^{t_1}|\beta(r)|dr<\infty,\ E\int_{t_0}^{t_1}|\gamma(r)|^2dw(r)<\infty$$

を満たし、フィルトレーション $\mathcal{F}(t)$ に適合する確率過程とする．この式は確率積分方程式と呼ばれている．この積分方程式の微分形式は、形式的に

$$d\xi=\beta(t)dt+\gamma(t)dw,\ t\in\mathscr{T} \tag{2}$$

で与えられる．

直積集合 $\mathscr{T}\times\mathscr{S}$ 上で定義される関数 $\psi(t,x)$ を考える．この関数の偏微分 ψ_t,ψ_x,ψ_{xx} が $\mathscr{T}\times\mathscr{S}$ 上で連続ならば、関数 ψ は関数族 $C^{1,2}$ に属するという．

確率変数 ξ が n 次元ベクトルであるならば、確率微分方程式 (2) の要素ごとの一次元表現は

$$d\xi_i=\beta_i(t)dt+\sum_{j=1}\gamma_{ij}(t)dw_j,\ i=1,2,\ldots,n,\ t\in\mathscr{T} \tag{3}$$

となる．ここで、ブラウン運動は d 次元確率過程となっている．つまり、

$$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)^t,\ w=(w_1,\ldots,w_d)^t$$

である．β がベクトルで $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)^t$ と表現され、γ が行列で、その i 行 j 列を γ_{ij} とすれば、式 (2) は確率変数 ξ がベクトルであるケースを含めた確率微分方程式となる．

定理 2.1 **(伊藤の公式)**
もし ψ が関数族 $C^{1,2}$ に属し、$\eta(t)=\psi[t,\xi(t)]$ であるとする．ただし、ξ は (2) を満たす 1 次元確率過程であるとする．このとき、関係式

$$\begin{aligned}d\eta &= \psi_t(t,\xi(t))dt+\psi_x(t,\xi(t))d\xi+\frac{1}{2}\psi_{xx}(t,\xi(t))d\xi d\xi,\\ &= \psi_t(t,\xi(t))dt+\psi_x(t,\xi(t))\beta(t)dt+\frac{1}{2}\psi_{xx}(t,\xi(t))\gamma^2(t)dt+\psi_x(t,\xi(t))\gamma(t)dw\end{aligned}$$

が成立する．ψ_t は関数 ψ の時間による偏微分、ψ_x は第 2 番目の変数 ξ による関数 ψ の偏微分、ψ_{xx} は ξ による 2 階偏微分を表現する．これを伊藤の確率微分公式という．

伊藤の公式が成立する端的な理由はブラウン運動の 2 次変分が時間の線形関数になっていることによる．関数 η をテイラー級数展開するときに、$dt^2\approx 0,\ dwdt\approx 0$ が成立する一方で、2 次の項に $d\xi(t)d\xi(t)=\gamma^2(t)dw(t)dw(t)=\gamma^2(t)dt$ が含まれてしまうので、2 次項すべてを無視できず、dw の 2 次項を含む近似式で考えなければいけないことによる．

ここで、状態変数 ξ が確率微分方程式 (3) に従う n 次元ベクトルであるケースを考える．

$$\psi_x=(\psi_{x_1},\ldots,\psi_{x_n}),\ a_{ij}=\sum_{l=1}\gamma_{il}\gamma_{jl}$$

とおくと、伊藤の公式は

$$\begin{aligned}d\eta &= \psi_t(t,\xi(t))dt+\psi_x(t,\xi(t))d\xi+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}\psi_{x_ix_j}(t,\xi(t))d\xi_id\xi_j,\\ &= \psi_t(t,\xi(t))dt+\sum_{i=1}\psi_{x_i}(t,\xi(t))\beta_i(t)dt+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}a_{ij}\psi_{x_ix_j}(t,\xi(t))dt+\sum_{i=1}\psi_{x_i}(t,\xi(t))\sum_{l=1}\gamma_{il}(t)dw_l\end{aligned}$$

とベクトル値確率過程に対して拡張される．

確率微分方程式において、係数 β, γ が状態変数 ξ の関数となっていることを明示的に表示すれば、

$$d\xi = b(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dw \tag{4}$$

と表現できる．ただし、以下ではすべて、w は標準ブラウン運動を表現する．1 次元変数表現にすると、

$$d\xi_i = b_i(t, \xi(t))dt + \sum_{j=1} \sigma_{ij}(t, \xi(t))dw_j, i = 1, 2, \ldots, n$$

である． 確率微分方程式 (4) の解は以下の確率積分方程式

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(r, \xi(r))dr + \int_{t_0}^{t} \sigma(r, \xi(r))dw(r) \tag{5}$$

の解と理解される．ただし、$\xi(t_0)$ は初期値である．確率微分方程式 (4) の解 (強い解) が存在するための条件を考える．解が存在するための条件として、以下の二つの条件 (伊藤の条件とも言う) が成立することが必要である．すなわち、

(1). すべての $(t, x), (t, y) \in Q^0 = (t_0, t_1) \times R^n$ に対して

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K\|x - y\|)$$

を満たす正の定数 K が存在する；

(2). すべての有界な $x \in R^n$ と $t \in (t_0, t_1)$ に対して

$$\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2)$$

を満たす定数 K が存在する；

という 2 条件が成り立つことである．$\|x\|$ はノルムを表す．条件 (1) は Lipschitz の条件と言われ、条件 (2) は成長の条件と言われている．以下では、この条件が成立して、確率積分方程式の解がユニークに定まることを前提とする.[6]

確率過程 ξ がマルコフ過程であるためには、任意の時刻 r における状態 $\xi(r)$ が、時刻 r 以降の時刻における確率過程の状態に関するすべての確率的情報を含んでいる必要がある．すなわち、任意の $s_1 < s_2 < \cdots < s_m < t \in \mathscr{T}$ とすべての $B \in \mathscr{B}(\mathscr{S})$ に対して、

$$\Pr(\xi(t) \in B \mid \xi(s_1), \ldots, \xi(s_m)) = \Pr(\xi(t) \in B \mid \xi(s_m)) \tag{6}$$

が成立するとき、確率過程 ξ はマルコフ過程であるといわれる．

$$P(s, y; t, B) = \Pr(\xi(t) \in B \mid \xi(s) = y)$$

を推移関数 (推移確率) という．s, t, B を与えるとき、$P(s, \cdot; t, B)$ は $\mathscr{S}$ で可測関数であり、s, y, t を与えるとき、$P(s, y; t, \cdot)$ は $\mathscr{S}$ の確率測度となる．よく知られているように、チャップマン-コルモゴロフの方程式

$$P(s, y; t, B) = \int_{\mathscr{S}} P(r, x; t, B)P(s, y; r, dx)$$

[6]確率微分方程式の解が存在するための条件については、Karatzas and Shreve(1991) の第 5 章を参照してください.

が成立する．マルコフ過程の推移作用素を定義する．状態空間 $\mathscr{S}$ 上で有界で、ボレル可測な実数値関数の集合を $V(\mathscr{S})$ と表記する．ただし、ノルムは

$$\|\Psi\| = sup_{x\in\mathscr{S}}|\Psi(x)|$$

で定義される．$\mathscr{S}$ 上の関数 $\Psi(x)$ に対して、推移作用素 $S_{s,t}$ を以下のように定義できる．

$$S_{s,t}\Psi(y) = \int_{\mathscr{S}} \Psi(x)P(s,y;t,dx) = E_{sy}\Psi[\xi(t)].$$

ここで、表記法 E_{sy} は初期データが $\xi(s) = y$ であることを明示する．チャップマン-コルモゴロフの方程式から、

$$S_{s,t} = S_{r,t}(S_{s,r}),\ s < r < t$$

が成立することは容易に理解できる．さらに、$V(\mathscr{S})$ の部分集合に対して、以下のように生成作用素 $\mathscr{A}(t)$ を定義する[7]．$\mathscr{S}$ 上で連続かつ有界な任意の関数 $\Psi(t,x),\ x\in\mathscr{S}$ に対して

$$\mathscr{A}(t)\Psi = \lim_{h\to 0^+}\frac{S_{t,t+h}\Psi - S_{t,t}\Psi}{h}$$

と定義する．ここで、$S_{t,t} = 1$ である．生成作用素は関数 Ψ を関数 $\mathscr{A}(t)\Psi$ に変換する操作を定めるものである．チャップマン-コルモゴロフの方程式を用いれば、

$$\frac{S_{s,t+h}\Psi - S_{s,t}\Psi}{h} = \frac{S_{t,t+h}(S_{s,t}\Psi) - S_{s,t}\Psi}{h}$$

であるから、$u(t,x) = S_{s,t}\Psi(x)$ とおいて、h を無限小にする極限をとれば、

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathscr{A}(t)u(t,x)$$

という微分方程式が得られる．これをコルモゴロフの後ろ向きの方程式という．推移関数が時間の差 $t-s$ のみに依存するとき、すなわち

$$P(s,y;t,B) = P(0,y;t-s,B)$$

が成立するとき、マルコフ過程は定常過程あるいは自律的であると言われる．マルコフ過程が定常的であるとき、推移作用素は $S_t = S_{0,t}$ なる関係を満たす半群を形成する．

定義 2.2 **(拡散過程)**
以下の条件を満たすマルコフ型確率過程を拡散過程という[8].

(1). 任意の $\epsilon > 0$ と $t\in\mathscr{T}$ および $x\in R^n$ に対して

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-1}\int_{|x-z|>\epsilon} P(t,x;t+h,dz) = 0,$$

が成立する；

(2). 任意の $\epsilon > 0$ と $t\in\mathscr{T}$ および $x\in R^n$ に対して

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{|x-z|\leq\epsilon}(z_i - x_i)P(t,x;t+h,dz) = b_i(t,x),$$

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{|x-z|\leq\epsilon}(z_i - x_i)(z_j - x_j)P(t,x;t+h,dz) = a_{ij}(t,x),$$

となるような連続関数 $a_{ij}(t,x), b_i(t,x), i,j = 1,\ldots,n$ が存在する．

[7]生成作用素の定義とその性質についての詳細は、Øksendal(2005) の第 7 章を参照してください．
[8]ここで用いた定義は、Karlin and Taylor(1981) による．

ベクトル値関数 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ はドリフト係数、行列値関数 $a = (a_{ij})$ は共分散係数といわれる．定義の第１の条件式の代わりに以下のようなより強い条件

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{\|x-z\|>\epsilon} \|z - x\|^2 P(t, x; t+h, dz) = 0,$$

が用いられることが多い．このとき、$b(t, \xi(t))h$ と $a(t, \xi(t))h$ は, それぞれ、$\xi(t)$ を与えたときの, 増分 $\xi(t+h) - \xi(t)$ の条件付期待値と共分散行列を非常によく近似する．共分散行列 a が

$$a_{ij} = \sum_{l=1} \sigma_{il}\sigma_{lj},\ i, j = 1, \ldots, n$$

なる関係式で表現できるとき、確率積分方程式 (5) の解は拡散過程となることは容易に理解できる．

確率過程が拡散過程であるケースに対して、生成作用素 $\mathscr{A}(t)$ は以下のような微分作用素となることが知られている.[9]

定理 2.2 (**拡散過程の生成作用素**)
ベクトル値関数 b と行列値関数 a は連続関数で、伊藤の条件を満たしているとする．このとき、確率過程 ξ がドリフト係数 b と共分散行列 a をもつ拡散過程ならば、生成作用素 $\mathscr{A}$ は以下のように２階の偏微分作用素

$$\mathscr{A}(t)\Psi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} a_{ij}(t, \xi)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1} b_i(t, \xi)\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \frac{1}{2}a\Psi_{xx} + b\Psi_x \tag{7}$$

で表現できる．ただし、関数 Ψ は ξ の C^2 関数である．

飛躍型マルコフ過程における生成要素は以下のように与えられることが知られている．状態 ξ が x から出発したとき、x 以外の状態に達する時間の最小値を

$$\tau_x(\omega) = \inf\{t > 0;\ \xi(t) \neq x\}$$

と定義する．x から出発したサンプル経路が時刻 t までに飛躍しない確率 $P_x(\tau_x \geq t)$ は

$$P_x(\tau_x \geq t) = e^{-\lambda(x)t}$$

となる．つまり、τ_x はパラメター $\lambda(x)$ の指数分布に従い、$E_x(\tau_x) = 1/\lambda(x)$ が成立する．時刻 τ_x で飛躍したとき、サンプル経路が E にいる確率分布 $P_x(\xi(\tau_x) \in E)$ を

$$\pi(x, E) = P_x(\xi(\tau_x) \in E)$$

と表記する．このとき、生成作用素 $\mathscr{A}(t)\Psi$ は

$$\mathscr{A}(t)\Psi = \lambda(\pi\Psi - \Psi)$$

で与えられる．ただし、

$$\pi\Psi(x) = \int_{\mathscr{S}} \pi(x, dy)\Psi(y)$$

である．例としてポアッソン過程を考えると、$\lambda(x) = \lambda$、$\pi(x, E) = \delta_{x+1}(E)$ であるから、

$$\mathscr{A}(t)\Psi(x) = \lambda(\Psi(x+1) - \Psi(x))$$

[9] 伊藤拡散過程における生成作用素の具体的計算過程の詳細については、Øksendal(2005) の第 7 章あるいは Karlin and Taylor(1981) の第 15 章を参照してください.

となる．

確率過程 ξ が確率微分方程式 (4) に従うとする．関数 $\eta(t) = \psi(t, \xi(t))$ に伊藤の公式を適用すると、

$$d\eta = \psi_t(t,\xi(t))dt + \psi_x(t,\xi(t))b(t,\xi)dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} a_{ij}\psi_{x_i,x_j}(t,\xi(t))dt + \psi_x(t,\xi(t))\sigma(t,\xi(t))dw,$$

が得られる．この両辺を積分すると、

$$\psi(t,\xi(t)) - \psi(s,\xi(s)) = \int_s^t [\psi_t + \mathcal{A}(r)\psi(r)]dr + \int_s^t \psi_x \sigma dw$$

となる．この両辺の期待値をとれば、以下の定理が成立する．

定理 2.3

b, a は伊藤の条件における第 1 条件式を満たし、ψ は関数族 $C^{1,2}$ に属する連続な関数であるとする．さらに、任意の (s, y) に対して、

$$E_{sy}\int_s^{t_1} |\psi_t + \mathcal{A}(t)\psi(t)|dt < \infty$$

を満たすとする．このとき、

$$\psi(s,y) = -E_{sy}\int_s^t [\psi_t + \mathcal{A}(t)\psi(t)]dt + E_{sy}\psi(t,\xi(t)) \tag{8}$$

が成り立つ．

この定理は伊藤の公式を生成作用素を用いて表現したものと理解され、ファインマン-カッツの公式の特殊ケースに該当するとも言える．なお、確率過程 ξ が拡散過程でなくても、マルコフ過程であればこの定理が成立することも知られている．

ファイナンスの理論で用いられるリスク中立測度の概念を導入するために、マーチンゲール測度を説明する．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上に定義される確率変数 X と Z を考える．ただし、$P(Z > 0) = 1,\ EZ = 1$ とする．このとき、新しい確率測度 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega)dP(\omega), A \in \mathcal{F}$$

と定義する．このように定義された $\tilde{P}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率測度で、P と等価である．$\tilde{P}$ と P が互いに等価であるとは、それぞれの測度にゼロを与える集合が一致することを言う．ラドン=ニコディムの定理から、そうした等価な測度が上記の定義によって与えられることが知られている[10]．確率変数 X の確率測度 P による期待値 EX と確率測度 $\tilde{P}$ による期待値 $\tilde{E}X$ を考えることができる．これらの間には

$$\tilde{E}X = E[XZ]$$

という関係があることも証明できる．Z をラドン=ニコディム微分といい、

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}$$

と書く．ブラウン運動の時刻 t までのフィルトレーションを $\mathcal{F}(t)$ とするとき、ラドン=ニコディム微分過程を

$$Z(t) = E[Z|\mathcal{F}(t)],\ 0 \leq t \leq T$$

[10] Radon-Nikodym の定理の証明については、Royden(1968) などのルベーグ測度論のテキストを参照してください．

と定義する． $0 \le s \le t \le T$ に対して、条件付期待値の性質から

$$E[Z(t)|\mathcal{F}(s)] = E[E[Z|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(s)] = E[Z|\mathcal{F}(s)] = Z(s)$$

なので、ラドン＝ニコディム微分過程はマーチンゲールである．Girsanov の定理が非常に重要となるので、証明なしで以下に掲載する[11].

定理 2.4 (Girsanov **の定理**)
$w(t)$, $0 \le t \le T$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準ブラウン運動、$\mathcal{F}(t)$ をこのブラウン運動のフィルトレーション、$\Theta(t)$ を $\mathcal{F}(t)$ に関して可測な過程であるとする．

$$Z(t) = \exp\{-\int_0^t \Theta(u)dw(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du\}, \tag{9}$$

$$\tilde{w}(t) = w(t) + \int_0^t \Theta(u)du \tag{10}$$

と定義する．ただし、

$$E\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du < \infty$$

と仮定する． $Z = Z(T)$ とおく． このとき、$EZ = 1$ であり、確率測度 $\tilde{P}$ のもとで、確率過程 $\tilde{w}(t)$ は標準ブラウン運動となる．

確率過程 $\tilde{w}(t)$ は標準ブラウン運動なので、$d\tilde{w}d\tilde{w} = dt$ である．$dZ(t) = -\Theta(t)Z(t)dw(t)$ なので、

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t \Theta(u)Z(u)dw$$

と表現できる．$Z(t)$ もマーチンゲールとなっている．以上の結論は確率過程 Θ がベクトル値であっても成立する．

ファイナンス理論では、資産価格 S は通常、幾何的ブラウン運動

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dw$$

に従うと仮定される．この解は

$$S(t) = S(0)\exp\{\int_0^t \sigma dw(s) + \int_0^t (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)ds\}$$

である．時刻 t における利子率を $r(t)$ とすると、割引率過程 D は

$$\frac{dD}{D} = -r(t)dt; \, D(t) = \exp\{\int_0^t -r(s)ds\}$$

で与えられる．資産価格の現在価値は

$$D(t)S(t) = S(0)\exp\{\int_0^t \sigma dw(s) + \int_0^t (\alpha - r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)ds\}$$

となる．また、

$$d(D(t)S(t)) = (\alpha(t) - r(t))D(t)S(t)dt + \sigma(t)D(t)S(t)dw(t)$$

[11] この定理は確率過程論の大学院生向けテキスト Karatzas and Shreve(1991) やØksendal(2005) などでは証明が厳密に展開されている．Shreve(2004) には分かりやすい証明が載っている．

である．ここで、

$$\Theta(t) = \frac{\alpha(t) - r(t)}{\sigma(t)}$$

とおくと、

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)[\Theta(t)dt + dw(t)]$$

となる．この Θ はリスクの市場価格と呼ばれているものである．ここで Girsanov の定理を適用すると、

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)d\tilde{w}(t)$$

なので、

$$D(t)S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma(s)D(s)S(s)d\tilde{w}(s)$$

が成立している．確率測度 $\tilde{P}$ のもとでは、$\tilde{w}$ は標準ブラウン運動となっているので、伊藤積分はマーチンゲールである．よって、$D(t)S(t)$ はマーチンゲールとなっている．つまり、$\tilde{E}[D(t)S(t)] = S(0)$ である．$dw = d\tilde{w} - \Theta dt$ を資産価格の方程式に代入すると、

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma d\tilde{w}(t)$$

と変形できる．確率測度 $\tilde{P}$ のもとでは、資産価格の期待収益率は利子率になっている．この確率測度の導入によって、リスクが中立化されていることになる．確率測度 $\tilde{P}$ はリスクを中立化するのでリスク中立測度、あるいは資産価値をマーチンゲール化するのでマーチンゲール測度と呼ばれている．

3 確率的最適制御問題の解法

ここでの最適化問題は、システムの状態 $\xi(t)$ がマルコフ過程に従うとき、評価関数

$$J(t_0, x_0, \mathsf{u}) = E_{t_0,x_0}[\int_{t_0}^T L(t, \xi(t), u(t))dt + \Phi(T, \xi(T))]$$

を最大にする政策変数 u をフィードバック形式

$$u(t) = \mathsf{u}(t, \xi(t))$$

で求めることである．ここで、(t_0, x_0) はシステムの初期時刻と初期値、T は終端時刻である．評価関数 L に関しては、以下の条件が満たされていると仮定される．すなわち、

$$|L(t, x, u)| \leq C$$

が成立するような定数 C が存在する．

システムの状態が不確実なので、政策変数は観察された状態変数に依存するようなフィードバック関数を取る必要がある．この政策変数は Q^0 から U(ユークリッド空間の部分集合) へのボレル可測な関数と仮定される。システムの状態が政策変数 u に依存することを明示的に表現すると、システムを支配する確率微分方程式は

$$d\xi = f(t, \xi(t), u(t))dt + \sigma(t, \xi(t), u(t))dw \tag{11}$$

と表現される．通常、確率微分方程式に現れる関数 $f(t,x,u),\sigma(t,x,u)$ は C^1 関数であり、

$$\|f(t,0,0)\| \le C,\ \|\sigma(t,0,0)\| \le C$$
$$\|f_x\| + \|f_u\| \le C,\ \|\sigma_x\| + \|\sigma_u\| \le C$$

を満たす定数 C が存在すると想定されている．

動的計画法の価値関数は

$$W(s,y) = \sup_{\mathsf{u}} J(s,y,\mathsf{u})$$

で与えられる．ここで、(s,y) は時刻 s で直面する最適化問題における初期値である。最適化問題の解が u^* であるならば、すべての $(s,y) \in Q^0$ に対して $W(s,y) = J(s,y,\mathsf{u}^*)$ が成立する．前節の式 (8) において、$\psi = W$ とおくと、すべての $s < t \le T$ に対して、

$$W(s,y) = -E_{sy}\int_s^t [W_s(r,\xi(r)) + \mathscr{A}(r)W(r,\xi(r))]dr + E_{sy}W(t,\xi(t)) \tag{12}$$

が成立する．

政策変数が最適な政策変数から乖離しているとき、例えば、

$$u_1(r,x) = \begin{cases} u(r,x), & r \le t, \\ u^*(r,x), & r > t \end{cases}$$

であるとき、条件付期待値の性質から

$$J(s,y,\mathsf{u}_1) = E_{sy}\int_s^t L(r,\xi(r),u(r))dr + E_{sy}J(t,\xi(t),\mathsf{u}^*)$$

が成り立つ．当然のことながら、

$$W(t,\xi(t)) = J(t,\xi(t),\mathsf{u}^*)$$

が成立している．さらに、

$$W(s,y) \ge J(s,y,\mathsf{u}_1) = E_{sy}\int_s^t L(r,\xi(r),u(r))dr + E_{sy}W(t,\xi(t)) \tag{13}$$

が成り立つことも容易に理解できる．式 (13) から 式 (12) を引き算し、$v = u(s,y)$ と置けば

$$0 \ge W_s + \mathscr{A}(s)W + L(s,y,v)$$

が得られる．$v = \mathsf{u}^*(s,y)$ であるときに、不等式は等式となる．ここで、確率的最適制御問題における動的計画法の基本方程式

$$W_s + \sup_{v\in U}[\mathscr{A}(s)W + L(s,y,v)] = 0 \tag{14}$$

が得られる．境界条件は

$$W(T,y) = \Phi(T,y)$$

である．(14) 式はハミルトン - ヤコビ - ベルマン (Hamilton-Jacobi-Bellam;HJB) 方程式と言われている．

確率過程が拡散過程であるならば、生成作用素 $\mathscr{A}$ は以下のように表現できる．式 (7) より

$$\mathscr{A}(s)\Psi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} a_{ij}(s,y,v)\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1} f_i(s,y,v)\frac{\partial\Psi}{\partial y_i} \tag{15}$$

この結果を用いると、以下の定理が成立する．

定理 3.1 **(確率的最適制御問題の基本方程式)**
$W(s,y)$ を動的計画法の基本方程式 (ハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式)

$$W_s + \max_{v\in U}[\mathscr{A}(s)W + L(s,y,v)] = 0,\ (s,y)\in Q^0$$

の解であるとする．このとき、

(1). 許容されたフィードバック政策変数 u と任意の初期データ $(s,y)\in Q^0$ に対して、

$$W(s,y)\geq J(s,y,\mathrm{u})$$

である；

(2). u^* が許容されたフィードバック政策であり、すべての初期値データ $(s,y)\in Q^0$ に対して

$$\mathscr{A}(s)W + L(s,x,u^*) = \max_{v\in U}[\mathscr{A}(s)W + L(s,x,v)]$$

を満たすならば、$W(s,y) = J(s,y,\mathrm{u}^*)$ である．つまり、 u^* は最適解である．

この定理の証明は、Fleming and Rishel(1975),chapter VIを参照してください．u が許容されたフィードバック政策であるための条件は、要約すると、u がボレル可測で、有界であること、そして、その政策が適用されたとき確率微分方程式 (11) の解が存在し、有界であることを要求する．関数 u の不連続な点の集合は測度ゼロであり、ほとんどすべての時刻で連続であることが要求される．

経済学で直面する最適化問題における目的関数は

$$J(0,x_0,\mathrm{u}) = E_{0,x_0}\left[\int_0^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho t}dt + \Phi(T,\xi(T))e^{-\rho T}\right]$$

と一般的に表現される。ここで、定数 ρ は限界時間選好率あるいは割引率と言われる。価値関数を

$$W(s,y) = \sup_{\mathrm{u}} E_{sy}\left[\int_s^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + \Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s)}\right]e^{-\rho s}$$

とおき、新しく関数 $V(s,y)$ を

$$V(s,y) = \sup_{\mathrm{u}} E_{sy}\left[\int_s^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + \Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s)}\right]$$

と定義する．つまり、

$$W(s,y) = V(s,y)e^{-\rho s}$$

なる関係が成り立つ。この関係式を、式 (14) に代入すれば、動的計画法のハミルトン-ヤコビ - ベルマン方程式は

$$V_s + \max_{v\in U}[\mathscr{A}(s)V + L(s,y,v)] = \rho V(s,y) \tag{16}$$

と定式化される．

経済学でのモデル分析では、経済学的な直感が重要な役割を果たすので、経済学的な概念と整合的な動的計画法の基本方程式の利用方法が有効である．ここで、経済学的な概念と整合的な動的計画法の基本方程式を導出する．

$$F(s,y,\mathrm{u}) = E_{sy}\left[\int_s^T L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + \Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s)}\right]$$

と関数 F を定義すると、

$$V(s,y) = \sup_u F(s,y,\mathsf{u})$$

という関係が成立している．

$$F(s+dt,y+dx,\mathsf{u}) = E_{s+dt,y+dx}[\int_{s+dt}^{T} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s-dt)}dt + \Phi(T,\xi(T))e^{-\rho(T-s-dt)}]$$

である．テイラー級数展開を用いると、

$$\begin{aligned} F(s,y,\mathsf{u}) &= E_{sy}[\int_{s}^{s+dt} L(t,\xi(t),u(t))e^{-\rho(t-s)}dt + e^{-\rho dt}F(s+dt,y+dx,\mathsf{u})] + o(dt) \\ &= E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt + e^{-\rho dt}F(s+dt,y+dx,\mathsf{u})] + o(dt) \end{aligned}$$

が成立する。動的計画法における最適性の原理から

$$V(s,y) = \sup_u E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt + e^{-\rho dt}V(s+dt,y+dx)] \tag{17}$$

である．関係式

$$V(s+dt,y+dx) = V(s,y) + dV(s,y) + o(dt)$$

を (17) 式に代入すると、

$$V(s,y) = \sup_u E_{sy}[L(s,\xi(s),u(s))dt + e^{-\rho dt}V(s,y) + e^{-\rho dt}dV(s,y)] + o(dt)$$

となり、さらに、

$$e^{-\rho dt} = 1 - \rho dt + \frac{(\rho dt)^2}{2!} - \frac{(\rho dt)^3}{3!} + \dots$$

を用いて、$dt \to 0$ とすると、(17) 式は最終的に

$$\rho V(s,y) = \max_v \{L(s,y,v) + \frac{1}{dt}E_{sy}[dV(s,y)]\} \tag{18}$$

という関係式として成立する．これが動的計画法のベルマン方程式である。企業の投資行動での基本方程式と理解するならば、(18) 式の左辺は企業の所有者が要求する収益の大きさと理解される．他方、右辺の第 1 項は企業が獲得する利益の大きさで、第 2 項は企業価値のキャピタル・ゲインと理解されている．(18) 式は、企業所有者が要求する収益と企業所有者が予想する収益とが一致することを表現している．基本方程式 (18) に登場する $dV(s,y)$ は伊藤の公式を用いて計算できる．このとき、(18) 式は (16) と一致する．

4 Black-Scholes-Merton モデルによるデリバティブの価格付け

この節では、オプション価格を複製ポートフォリオの作成と無裁定条件を用いて計算する手法を説明する．Merton(1973b) が提案した無裁定条件を用いる手法に基づいて、オプション価格が満たすべき偏微分方程式を導出する．この方程式を導出するに当たって、以下に記述されたような重要な仮定をする必要がある．

(1). 取引費用や税金などが存在せず、市場取引は連続的に行なわれ、空売りに関する制限はない．

(2). 資産市場には危険資産である株式が存在し、その価格は確率微分方程式

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dz \tag{19}$$

に従う．ここで、α は当該株式の瞬時的期待収益率、σ^2 は収益率の瞬時的分散の大きさを表す．dz は標準ウイーナー過程 (ブラウン運動) の増分である．α と σ は時間に依存しない定数とする．

(3). 満期 T までの時間が τ である債券の価格 $B(\tau)$ は以下の確率微分方程式

$$\frac{dB}{B} = r(\tau)dt + \sigma_B(\tau)dw(t;\tau), \quad \tau = T - t \tag{20}$$

に従うとする．ここで、$r(\tau)$ は債券の瞬時的期待収益率、 $\sigma_B(\tau)^2$ は収益率の瞬時的分散の大きさを表し、$dw(t;\tau)$ は標準ウイーナー過程の増分である．$r(\tau)$ は満期までの時間とともに変化する．この定式化の下では、利子の期間構造などを考慮して、異なる満期を持つ債券の価格の間に相関があるケースも取り扱える．その相関係数は 1 以下である．つまり、

$$dw(t;\tau)dw(t;T) = \rho_{\tau T}dt, \quad \rho_{\tau T} < 1 \text{ for } \tau \neq T.$$

他方で、資産市場の効率性仮説に従って

$$dw(s;\tau)dw(t;T) = 0, \text{ for } s \neq t; \quad dw(s;\tau)dz(t) = 0 \text{ for } s \neq t$$

を仮定する．債券には不履行リスクが伴わないとすると、満期時点で債券価格は 1 である、つまり $B(0) = 1$ である．また、$\sigma_B(0) = 0$ でもある．利子率が確率的な変動を示さず、時間に依存しない場合には、$r(\tau) = r$, $\sigma_B = 0$ であり、$B(\tau) = e^{-r\tau}$ である．

(4). 投資家の危険回避度に関する仮定は必要ないが、すべての投資家はパラメター α, σ, $r(\tau)$, σ_B の値に関して同一の予測値を持ち、ウイーナー過程 (z, w) の確率分布に関して共通の情報を保有すると仮定する．

以下での導出方法を簡単化するために、債券価格の撹乱項 dw はゼロと仮定する．$dB = rBdt$ となり、リスク・フリー利子率は r である．株式を原資産とするデリバティブの価値 H は債券の価格 B と満期までの時間 $\tau = T - t$、およびデリバティブの行使価格 E の関数となるので、$H = H(S, E, t)$ と表現できる．伊藤の公式をこの関数 H に適用すると、

$$dH = H_S dS + H_t dt + \frac{1}{2}H_{SS}dSdS$$

が得られる．ここで、H_x は変数 x に関する偏微分を表現する．

$$dSdS = \sigma^2 S^2 dt,$$

であることを用いると、

$$\frac{dH}{H} = \alpha_H dt + \sigma_H dz \tag{21}$$

となる．ただし、

$$\begin{aligned} \alpha_H &= [H_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{SS} + \alpha S H_S]/H, \\ \sigma_H &= \sigma S H_S / H \end{aligned}$$

である．

株式、株式を原資産とするデリバティブ、および債券からなるポートフォリオを作成する．この債券の満期はオプションの満期と同一のものとする．資金ゼロでこのポートフォリオを作成する．例えば、債券を借りてきた売却資金で株式を購入すると言うようにしてポートフォリオを構成する．このポートフォリオ

の初期価格はゼロとなっている．株式への投資額を n_1、デリバティブへの投資額を n_2、債券への投資額を n_3 とすると、$n_1+n_2+n_3=0$ である．ポートフォリオの瞬時的変動の大きさを dY と表記すると、

$$dY = n_1\frac{dS}{S} + n_2\frac{dH}{H} + n_3\frac{dB}{B}$$

が成立する．dS, dH, dB を代入し、$n_3=-n_1-n_2$ を用いると、

$$dY = [n_1(\alpha - r) + n_2(\alpha_H - r)]dt + [n_1\sigma + n_2\sigma_H]dz \tag{22}$$

となる．すべてのリスクをヘッジするようにポートフォリオを構成するならば、

$$n_1\sigma + n_2\sigma_H = 0$$

が成立している．また、資産市場が効率的で裁定機会が存在しなければ、$dY = 0$ でなければならない．よって、

$$n_1(\alpha - r) + n_2(\alpha_H - r) = 0$$

である必要がある．この二つの条件から

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha_H - r}{\sigma_H}$$

が満たされなければならない．この条件式に α_H, σ_H の定義式を代入すれば、Black-Scholes の偏微分方程式

$$H_t + rSH_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{ss} = rH \tag{23}$$

が得られる．デリバティブが満期時点 T のヨーロピアン・コールオプションであれば、境界条件が

$$H(S,E,T) = \max(S-E, 0); \quad H(0,E,t) = 0$$

となる．良く知られている通り、以下の定理が成立する[12]．

定理 4.1 (Black-Scholes **の公式**)
境界条件

$$H(S,E,T) = \max(S-E, 0); \quad H(0,E,t) = 0$$

のもとで、偏微分方程式 (23) の解 $c(S,E,t) = H(S,E,t)$ は

$$c(S,E,t) = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2), \quad \tau = T - t \tag{24}$$

で与えられる．ここで、$N(\cdot)$ は正規分布の確率分布関数で、

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

ある．

[12] 1960 年代にブラウン運動を資産価格評価問題に導入したのは Samuelson であり、1960 年代末から 70 年代初期に彼の学生であった Merton がサミュエルソンのモデルを一般化した．Black と Scholes(1973) はサミュエルソンとマートンが定式化したモデルの延長線上で、オプション価格決定問題を議論した．この定理を最初に報告した論文は Black-Scholes(1973) であるが、その後、Merton(1973b) はこの結論を一般化している．この意味で、この公式は Black-Scholes-Merton の公式とも呼ばれている．詳しくは、Merton(1990) を参照してください．

次に、オプション価格の評価式の代替的な導出方法について説明する．この方法も基本的に無裁定条件を必須として用いる．資金総額 X のうち ΔS を株式 (Δ 単位の株式) に投資し、残り $X-\Delta S$ をマネー・マーケットで運用するようなポートフォリオを作成する．今マネー・マーケットでのリスクフリー利子率は r である．このポートフォリオの価値の期間 dt における上昇分は

$$dX = \Delta(t)dS(t) + r(X(t)-\Delta(t)S)dt = rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S dz$$

である．$e^{-rt}X(t)$ にさらに伊藤の公式を適用すると、

$$d(e^{-rt}X(t)) = -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) = \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dz \tag{25}$$

が得られる．株式 S を原資産とするデリバティブ (行使価格を E とし、満期が T であるヨーロピアン・コールオプション) の価値を $c(S,E,t)$ とする．この $c(S,E,t)$ に伊藤の公式を適用すると、

$$\begin{aligned} dc(S,E,t) &= c_t + c_S dS + \frac{1}{2}c_{SS}dSdS \\ &= [c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}]dt + \sigma S c_S dz \end{aligned} \tag{26}$$

となる．さらに、$e^{-rt}c(S,E,t)$ に伊藤の公式を適用すると、

$$d(e^{-rt}c(S,E,t)) = e^{-rt}[-rc + c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}]dt + e^{-rt}\sigma S c_S dz \tag{27}$$

が得られる．上記のポートフォリオ X とコールオプションの価値 c がすべての時刻 t で一致すように、すなわち、$e^{-rt}X(t) = e^{-rt}c(S,E,t)$ となるように、ポートフォリオを維持構成するとすれば、

$$d(e^{-rt}X(t)) = d(e^{-rt}c(S,E,t))$$

および $X(0) = c(S(0),E,0)$ が成立しなければならない．よって、(25) と (27) を等式で結ぶと、

$$\Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dz = [-rc + c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}]dt + \sigma S c_S dz$$

が得られる．この関係式が恒等式で成立するためには、

$$\Delta(t) = c_S(S,E,t)$$

および

$$\Delta(t)(\alpha - r)S(t) = -rc + c_t + \alpha S c_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}$$

が成立しなければならない．この両式から Black-Scholes の偏微分方程式

$$c_t(S,E,t) + rS(t)c_S(S,E,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS}(S,E,t) = rc(S,E,t)$$

が成立することが容易に分かる．複製ポートフォリオで株式の持分を $\Delta = c_S$ で与えることをデルタ・ヘッジという．Black-Scholes(1973) では、複製ポートフォリオを株式 1 単位のロング・ポジションと $1/\Delta$ 単位のオプションのショート・ポジションから構成すれば、リスクフリーのポートフォリオとなることを用いている．このリスクフリーのポートフォリオの収益率が r に等しくなる条件を使用すると、上記の結果が導出される．

ここで、リスク中立測度を導入すると、偏微分方程式を解かなくても Black-Scholes の公式が簡単に演繹できることを示す．割引率過程 $D(t) = \exp\{-rt\}$ とすると、(25) 式は

$$d(D(t)X(t)) = \Delta(t)\sigma D(t)X(t)d\tilde{z}$$

となる．ただし、$\theta=(\alpha-r)/\sigma$、$d\tilde{z}=dz+\theta dt$ である．マーチンゲール測度 $\tilde{P}$ のもとで、$\tilde{z}$ は標準ブラウン運動 (ウイーナー過程) であり、$D(t)X(t)$ はマーチンゲールである．この性質から、

$$D(t)X(t)=\tilde{E}[D(T)X(T)|\mathcal{F}(t)]$$

が成立する．よって、

$$\exp\{-rt\}c(S,E,t)=\tilde{E}[\exp\{-rT\}\max(S(T)-E,0)|\mathcal{F}(t)]$$

である．この右辺を計算すると簡単に Black-Scholes の結論が得られる[13].

上記の定式化では、原資産が株式という金融資産であった．リアル・オプションズでは、原資産は投資プロジェクトの実施から得られるキャッシュ・フロー流列の現在価値である．投資プロジェクトが工場建設で、この工場から生産された製品の販売が生み出す利益がキャッシュ・フローとなる．投資プロジェクトが生み出す将来利益は、製品の将来価格の変化や生産費用の将来的変動に依存する．この将来利益の変動を的確に表現する確率微分方程式を定式化することが重要となる．投資プロジェクトの実施が遅れれば遅れるほど、得られたであろう利益機会をより多く失っていることになる．この事実は、株式に対するコールオプションにおける配当金が果たすメカニズムと同様の作用を考慮する必要性を示している．機会費用の損失の大きさは単位時間当たり δ(資産 1 単位当たり) であるとすると、リアル・オプションを行使するまでの利益を支配する確率微分方程式は

$$d\tilde{S}=(\alpha-\delta)\tilde{S}dt+\sigma dz$$

とならなければならない．上記の手続きにおいて、デリバティブの価値の瞬時的上昇率 dY が配当金の大きさ分 $H_S\delta Sdt$ だけ減少することを考慮すると、α_H は

$$\alpha_H=[H_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2H_{SS}+(\alpha-\delta)SH_S]/H,$$

と修正されなければならない．この修正の下で上記の手続きを繰り返すと、デリバティブの価値を支配する偏微分方程式は

$$H_t+(r-\delta)SH_s+\frac{1}{2}\sigma^2S^2H_{ss}=rH \tag{28}$$

となる．従って、対応する Black-Scholes-Merton の公式は

$$c(S,E,t)=e^{-\delta\tau}SN(d_1)-Ee^{-r\tau}N(d_2),\quad \tau=T-t \tag{29}$$

で与えられる．ここで、d_1, d_2 も

$$d_1=\frac{\ln(S/E)+(r-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}$$

と修正される[14]．単位時間当たりの類似配当額 δ はリアル・オプション・モデルでは"Covenience Yield"と呼ばれている．通常、"Covenience Yield"とは商品在庫を保有することで得られる便益のことを指している[15].

金融資産のオプションとリアル・オプションの大きな相違点の一つは、金融資産のほとんどが市場で活発に取引されているが、リアル・オプションの対象となる原資産が市場ではほとんど取引されていない事実

[13]期待値の具体的な計算過程の詳細については、Shreve(2004) の第 5 章を参照してください.
[14]配当金が支払われる場合の公式は Merton(1973b) で与えられているが、簡単な導出過程については、Shreve(2004) の第 5 章で展開されている計算過程を参照してください.
[15]穀物商品や鉱物商品のコンビニエンス・イールドに関する詳しい説明は、Brennan and Schwartz(1985) を参照してください.

にある．投資プロジェクトが生み出す将来キャッシュフローの現在価値の計算で要求される割引率をどのように決定すべきかが重要な問題となる．対象となる投資プロジェクトの将来キャッシュフローに関わるリスクと類似のリスクを持つ金融資産を見出すことができれば話は簡単となる．あるいは、投資プロジェクトのリスクが計測できて、それと同様のリスクを持つ金融資産の存在を想定する必要がある．Merton(1973a)が定式化したICAPM(Intertemporal Capital Asset Pricing Model) によれば、あらゆる資産のリスク・プレミアムは当該資産のリスクと市場ポートフォリオのリスクとの共分散に依存する．資産 i の均衡期待収益率を α_i とすると、その資産のリスクプレミアムは

$$\alpha_i - r = \lambda \rho_{iM} \sigma_i \ ; \ \lambda = \frac{\alpha_M - r}{\sigma_M} \tag{30}$$

と与えられる．ここで、ρ_{iM} は市場ポートフォリオの収益率と資産 i の収益率との間の相関係数、α_M は市場ポートフォリオの均衡期待収益率、σ_M は市場ポートフォリオの収益率の標準偏差、σ_i は資産 i の標準偏差である．λ はリスクの市場価格といわれている．リアル・オプションの行使によって生み出されるキャッシュフローのリスクが金融資産 i と同一のものであるならば、このリアル・オプションの価値を計算する際には、市場均衡において、上式で与えられる収益率 α_i と同一の期待収益率がこのリアルオプションの収益率に対して要求されるはずである．

5　事例１：稼動・停止 (参入・退出) オプション

工場建設が行なわれた後、この工場からは時刻 t でキャッシュフロー $S(t)$ が生み出されるとする．ただし、生産が行なわれるためには、費用 $C(t)$ を投入する必要がある．従って、時刻 t における利益は

$$\pi(t) = \max[S(t) - C(t), 0]$$

となる．工場からのキャッシュフロー $S(t)$ は幾何ブラウン運動

$$\frac{dS}{S} = \alpha_S dt + \sigma_S dz_S$$

に従って変化すると仮定する．dz_S は当該キャッシュフローのリスクを表現する標準ウイーナー過程の増分である．時刻 s における利益 $\pi(s)$ に対する請求権の現在価値を $H(S(0), C(s), s)$ と表記する．

$$H(S(0), C(s), s) = e^{-rs} E_0 \pi(s).$$

ここで、r はリスクフリー (安全資産の) 利子率、E_0 は現在時点における情報の下での条件付期待値オペレータである．この請求権は満期が s で、行使価格 $C(s)$ のコールオプションと同一で、$H(S(0), C(s), s)$ はこのコールオプションの現在価値と理解される．時刻 t での請求権の価値は $H(S(t), C(s), s-t)$ となる．

$$H(S(t), C(s), s-t) = e^{-r(s-t)} E_t \pi(s).$$

ただし、E_t は時刻 t における情報の下での条件付期待値オペレータである．結論を見やすくするために、生産のために必要な費用 $C(t)$ の予想には不確実性が存在せず、時間にも依存せず、一定値を取ると仮定する．費用 $C(t)$ の予想に不確実性が伴うケースについては、後で取り扱う．

関数 H に伊藤の公式を適用すると ($C(s)$ を固定すると、S だけが確率過程なので)、

$$dH = H_t dt + \alpha_S S H_S dt + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 H_{SS} dt + \sigma_S S H_S dz_S$$

が得られる．よって、

$$dH = \alpha_H H dt + \sigma_H H dz_S$$

と表現できる．請求権 V の瞬時的期待収益率は

$$\alpha_H = [H_t + \alpha_S S H_S + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 H_{SS}]/H$$

であり、瞬時的分散の大きさは

$$\sigma_H^2 = (S H_S \sigma_S / H)^2$$

となっている．dH/H と dS/S の相関係数は

$$\rho_{HS} = \frac{\mathrm{Cov}(dH/H, dS/S)}{\sigma_H \sigma_S dt} = \frac{\sigma_H dz_S \sigma_S dz_S}{\sigma_H \sigma_S dt} = 1$$

なので、両者は完全に相関している．市場ポートフォリオと請求権 H の収益率の共分散を計算すると、

$$\sigma_{HM} dt = \mathrm{Cov}(dH/H, dM/M) = \sigma_H dz_S \sigma_M dz_M = \sigma_H \sigma_M \rho_{SM} dt = \rho_{HM} \sigma_H \sigma_M dt$$

となるので、$\rho_{HM} = \rho_{SM}$ である．ここで、

$$\rho_{HM}\sigma_H = (S/H) H_S \rho_{SM} \sigma_S$$

なる関係式が成立する．投資家は請求権 H の期待収益率に対して ICAPM で計算される収益率を要求するとすれば、式 (30) から、

$$\alpha_H - r = \lambda \rho_{HM} \sigma_H$$

が成立しなければならない．ここで、λ はリスクの市場価格である．この式に、$\rho_{HM}\sigma_H$ と α_H を代入すると、偏微分方程式

$$H_t + (r - \delta) S H_S + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 H_{SS} = rH \tag{31}$$

が得られる．ここで、

$$\delta = \alpha_H - \alpha_S; \quad \alpha_H = r + \lambda \rho_{SM} \sigma_S$$

とおいている．(31) 式は一般化された Black-Scholes-Merton の偏微分方程式といわれる．境界条件

$$H(S(s), C, s) = \max(S(s) - C, 0)$$

を与えるとき、この偏微分方程式の解は Black-Scholes の公式 (29) で与えられることは自明である．

こうして時刻 t での利潤に対する請求権、操業オプションの価値を計算することが出来る．時刻 t での操業オプションの現在価値を $H_0(S, C, t)$ と表記すると、工場によって生み出されるキャッシュフローの現在価値 V は

$$V(S, C, 0) = \int_0^T H_0(S, C, t) dt$$

となる．ここで、T は工場が稼動可能な時間の長さである．

Black-Scholes の公式を用いないで、モデル分析をする方法を導入する[16]．時刻 t での利潤に対する請求権 (操業オプション) の価値 $V(S(t), C(t), t)$ が満たすべき関係を考える．複製ポートフォリオ手法を活用する．この工場の操業オプションと当該生産物と類似のリスクを持つ商品のショート・ポジション n 単位

[16] この手法は Brennan and Schwartz(1985) が最初に用いた方法であり、その後、Dixit and Pindyck(1994) などの研究で多用されている．

からなるポートフォリオを作る．このポートフォリオ $Y = V - nS$ が期間 $(t, t+dt)$ 内に生み出す収益は $dY = dV - ndS$ であり、操業オプションを保有することから得られる利潤は $\pi(t)dt$ である．また、ショート・ポジションに伴って支払う必要のある金額はいわゆるコンビニエンス・イールド δ で表現される．従って、ポートフォリオがもたらす収益は

$$
\begin{aligned}
dV - ndS + \pi(t)dt - \delta nSdt &= [V_t + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + \alpha_S S V_S - n\alpha_S S - \delta nS + \pi(t)]dt \\
&\quad + (V_S\sigma_S S - n\sigma_S S)dz_S
\end{aligned}
$$

と計算される．$n = V_S$ とおくと、右辺第 2 項がゼロとなり、このポートフォリオからリスクが消去される．よってその収益率は安全資産の収益 $r(V - nS)$ に等しくならなければならない．つまり、

$$
V_t + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r-\delta)SV_S + \pi(t) = rV \tag{32}
$$

が成立する．操業オプションの価値 V は利潤の大きさに依存するだけなので、時刻 t には陽表的に依存せず、$V_t = 0$ とおける[17]．この偏微分方程式を解析的に解くことを試みる．時刻 t で $S < C$ のとき、権利行使がされず、操業が停止され、$\pi(t) = 0$ なので、

$$
\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r-\delta)SV_S = rV \tag{33}
$$

となり、時刻 t で $S > C$ のとき、権利が行使されるので、

$$
\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r-\delta)SV_S + S - C = rV \tag{34}
$$

が成立する．式 (33) の解は

$$
V(S, C) = A_1 S^{\beta_1} + A_2 S^{\beta_2}
$$

と表現できる．ここでの定数 A_1, A_2 は未定係数で境界条件から定まる．β_1, β_2 は

$$
\frac{1}{2}\sigma_S^2 \beta(\beta - 1) + (r-\delta)\beta - r = 0 \tag{35}
$$

の解である．$\beta_1 < \beta_2$ とすると、あきらかに、$\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$ である．$S < C$ のとき、$S \to 0$ となることが起こりうる．このケースで、V の値が有限に定まるためには、$A_1 = 0$ となる必要がある．よって、

$$
V(S, C) = A_2 S^{\beta_2}.
$$

式 (34) の解が

$$
V(S, C) = B_1 S^{\beta_1} + B_2 S^{\beta_2} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r}
$$

となることは、これを元の式に代入してみると明らかとなる．生産物の価格 S が非常に大きくなるとき、$\beta_2 > 1$ なので、$B_2 \neq 0$ でない限り、V の値が無限大になってしまう．これを除外するためには、$B_2 = 0$ としなければならない．よって、

$$
V(S, C) = B_1 S^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r} \quad .
$$

時刻 t 以降、工場を操業し続ける場合[18]、収益の現在価値の期待値は

$$
E_t \int_0^\infty S(t+s)e^{-\mu s}ds = \int_0^\infty S(t)e^{\alpha_S s}e^{-\mu s}s = \frac{S(t)}{\mu - \alpha_S}
$$

[17] ここで、生産費用は時間に依存せず、不確実性を伴わないと仮定している．

[18] ここでは、工場の稼動可能な期間が無限大であることを仮定しているが、稼動可能な期間が有限時間 T であるケースについても同様に議論できる．

であり、生産費用が変化せず一定であると仮定すると、総生産費用の現在価値は C/r となる．収益の割引率は同一リスクの金融資産の均衡収益率 $\mu = r + \lambda\sigma_S\rho_{SM}$ に等しくなければならない．生産費用に対する割引率はリスクがないのでリスクフリー利子率に等しい．上での議論から、コンビニエンス・イールドは $\delta = \mu - \alpha_S$ と定義される．よって、時刻 t における操業オプションの価値 V の第２項、第３項の和 $S(t)/\delta - C/r$ は操業を無限遠方まで続ける場合の利益の現在価値を表現する．第１項は、将来に $S < C$ が起きたとき、操業を停止するオプションを行使し、このことにより得られる利益の増加分の現在価値、すなわち操業停止オプションの価値を表現していると理解できる．まとめて、工場を所有することの価値 V は

$$V(S,C) = \begin{cases} B_1 S^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r}, & S > C \text{ の場合} \\ A_2 S^{\beta_2}, & S < C \text{ の場合} \end{cases}$$

と表現できる．未定係数 B_1 と A_2 は $S = C$ における境界条件から定まる．

生産物の価格が $S(t) = C$ をクロスして変化するとき、確率過程 $S(t)$ のサンプル経路が連続なので、現在価値 $V(S,C)$ も連続的に変化する必要がある．よって、$S(t) = C$ において、

$$A_2 S^{\beta_2} = B_1 S^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r} \tag{36}$$

が成立する．さらに、現在価値 $V(S,C)$ が $S(t) = C$ において滑らかに変化すること、つまり微分可能であることが要求されるので、

$$A_2\beta_2 S^{\beta_2 - 1} = B_1\beta_1 S^{\beta_1 - 1} + \frac{1}{\delta} \tag{37}$$

である[19]．これらを連立させて、A_2, B_1 に関して解くことができる．結果として、

$$A_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_2 - \beta_1}\left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta}\right);\ B_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_2 - \beta_1}\left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta}\right)$$

を得る．r, δ, C に数値を与えて、関数 $V(S,C)$ の具体的な関数形を求めて、グラフを描くことは容易にできる[20]．

Dixit(1989) が定式化したような参入・退出オプションの問題を分析することは、このモデルの枠内で容易にできる．稼動オプションを参入オプション、稼動停止オプションを退出オプションと解釈し直す．操業政策の問題では、$S > C$ の時には操業すると定式化されたが、参入問題では $S > S_H$ のときに参入するような臨界的参入収益 S_H が存在する．同様に、$S < S_L$ のときは退出するという臨界的退出収益の水準が存在する．参入している状態での企業の価値を V、退出した後での企業の価値を W と表記する．Black-Scholes-Merton の偏微分方程式を導出する手続きは全く同一なので、

$$\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 W_{SS} + (r - \delta) S W_S = rW, \tag{38}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 V_{SS} + (r - \delta) S V_S + S - C = rV \tag{39}$$

が成り立つ．よって、

$$\begin{aligned} W(S,C) &= A S^{\beta_2}, \quad S < S_L \text{の場合}, \\ V(S,C) &= B S^{\beta_1} + \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r}, \quad S > S_H \text{の場合} \end{aligned}$$

---

[19] コーシー問題の解 (Black-Scholes-Merton の偏微分方程式の解) が確率過程 S の連続関数で、微分可能でなければならないという条件は Karatzas and Shreve(1991) の定理 4.4.9 を参照して下さい．

[20] Dixit and Pindyck(1994, Chapter 6) は、$r = \delta = 0.04$, $C = 10$ と与えて、標準偏差 $\sigma_{\mathrm{S}} = 0,\ 0.02,\ 0.4$ のそれぞれに対して、具体的な計算結果をグラフに描いている．

となる．新規市場に参入するときは、k の大きさの参入費用が、市場から退出するときには l の大きさの退出費用が必要とされるとする．これを考慮すると、境界条件および平滑連続の条件は

$$W(S_H) = V(S_H) - k;\ V(S_L) = W(S_L) - l,$$
$$W_S(S_H) = V_S(S_H);\ V_S(S_L) = W_S(S_L)$$

と表現できる．境界条件および平滑連続の条件を用いて、係数 A, B および臨界値 S_H, S_L を決定することができる．実際にこうした計算をすると、

$$S_H > C + rk;\ S_L < C - rl$$

が得られる[21]．この政策は S_H と S_L を上下のトリガーとする典型的な bang-bang(Ss) タイプの政策である．

動的計画法を用いて解くこともできる．ここで考察すべき確率的最適制御問題は目的関数

$$V(S, C, 0) = E_0 \int_0^\infty \pi(t) e^{-\mu s} ds$$

を最大にするような操業政策 $u(t)$ を求めることである．操業政策 $u(t)$ を $\pi(s) = \max[S(s) - C(s), 0]$ となるような政策とすれば、目的関数は最大化される．

$$V(S, C, t) = E_t \int_t^\infty \pi(s) e^{-\mu(s-t)} ds$$

とおくと、ハミルトン−ヤコビの偏微分方程式は

$$V_t + V_S \alpha_S S + \frac{1}{2} V_{SS} \sigma_S^2 S^2 + \pi(t) = \mu V$$

となる．後は上記と同じ手続きに従って解を求めればよい[22].

権利行使価格である生産費用が確率的に変動するケース、例えば、生産費用が確率微分方程式

$$\frac{dC}{C} = \alpha_C dt + \sigma_C dz_C \tag{40}$$

に従う場合を考えよう．ここで、dz_C は生産費用の確率変動を引き起こす標準ウィーナー過程の増分である．時刻 s における利益 $\pi(s)$ に対する請求権 (操業オプション) の現在価値を $H(S(0), C(0), s)$ と表記する．時刻 t での請求権の価値は $H(S(t), C(t), s - t)$ となる．伊藤の公式を適用すると

$$\begin{aligned} dH = [H_t + \alpha_S S H_S + \alpha_C C H_C &+ \frac{1}{2}(\sigma_S^2 S^2 H_{SS} + \sigma_C^2 C^2 H_{CC} + 2CS\sigma_S \sigma_C \rho_{SC} H_{SC})]dt \\ &+ H_S \sigma_S S dz_S + H_C \sigma_C C dz_C \end{aligned}$$

が得られる．操業オプションの価値 H の瞬時的期待収益率は

$$\alpha_H = [H_t + \alpha_S S H_S + \alpha_C C H_C + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 H_{SS} + \frac{1}{2}\sigma_C^2 C^2 H_{CC} + CS\sigma_S \sigma_C \rho_{SC} H_{SC}]/H$$

であり、瞬時的分散の大きさは

$$\sigma_H^2 dt = \mathrm{Var}[S H_S \sigma_S dz_S + H_C \sigma_C C dz_C]/H^2$$

となる．また、

$$\rho_M \sigma_H = [H_S S \sigma_S \rho_{SM} + H_C C \sigma_C \rho_{CM}]/H$$

[21] 具体的な計算過程については、Dixit(1989) を参照してください.

[22] 動的計画法による導出と複製ポートフォリオ手法による解法の相違については次節での説明を参照してください.

が成立している．これらを ICAPM の関係式 $\alpha_H - r = \lambda\rho_{HM}\sigma_H$ に代入すると、

$$H_t + (r-\delta)SH_S + (r-\eta)CH_C + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 H_{SS} + \frac{1}{2}\sigma_C^2 C^2 H_{CC} + SCH_{SC}\sigma_S\sigma_C\rho_{SC} = rH \tag{41}$$

となる．ここで、

$$\eta = (r + \lambda\rho_{CM}\sigma_C) - \alpha_C$$

である．この偏微分方程式の解は

$$\begin{aligned} H(S,C,t) &= e^{-\delta\tau}SN(d_1) - Ce^{-\eta\tau}N(d_2), \quad \tau = T - t, \\ d_1 &= \frac{\ln(S/C) + (\eta - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \\ \sigma^2 &= \sigma_S^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{SC}\sigma_S\sigma_C \end{aligned}$$

となることが知られている[23].

6　事例 2：最適投資タイミング・オプション

投資額 K を投資するならば、毎期生産量 Q の製品が生産できる工場を建設する投資プロジェクトを考える．投資の実行には長期の時間は必要とされず、瞬時に実行できると仮定する．別の言い方をすると、生産が開始されるまでの期間に投資される額を生産開始の時点での現在価値額を K と考えても良い．投資プロジェクトの最適実施タイミングの問題を分析するために、工場建設が実行され、工場が稼動して以降の操業停止オプションが取れないケースを考える．モデルを特定化するために、工場からの生産量 Q は資本ストック K と労働投入量 L の Cob-Douglas 型生産関数によって定まるとする．

$$Q = K^a L^b.$$

企業の直面する需要量は逆需要関数

$$P(t) = \theta(t)Q(t)^{-1/\xi}$$

によって与えられるとする．ここで、P は製品の市場価格、ξ は需要の価格弾力性である．通常、$\xi > 1$ と仮定できる．$\theta(t)$ は需要量に影響を与える確率的な変動項である．この市場での需要量に作用する撹乱項は確率微分方程式

$$\frac{d\theta}{\theta} = \alpha_\theta dt + \sigma_\theta dz_\theta \tag{42}$$

に従う．dz_θ は標準ウィーナー過程の増分である．言うまでもなく、この定式化は当該企業が独占的な価格支配力を有すると仮定している[24]．時刻 t での利潤は

$$\pi(t) = P(t)Q(t) - wL(t)$$

である．$L(t)$ は時刻 t での労働投入量、w は賃金率である．各時刻 t で企業は利潤を最大化するように労働投入量 $L(t)$ を調整できると仮定する．最適な労働投入量のもとでは利潤は

$$\pi(t) = k\theta(t)^\gamma$$

[23] McDonald and Siegel(1985) を参照してください．

[24] 完全競争市場を想定する場合、収益関数の価格弾力性が異なるだけで、結論の定性的な特徴は変化しない．

となる．ただし、k は

$$k = w[\frac{1}{b(1-\frac{1}{\xi})}][\frac{w}{b(1-\frac{1}{\xi})}K^{-a}]^{\frac{1}{b(1-\frac{1}{\xi})-1}}$$

と定義される資本ストック K に依存する係数で、

$$\gamma = \frac{1}{1-b(1-\frac{1}{\xi})} > 1$$

である．投資の調整費用を無視すれば、工場建設の投資額は資本ストック K と同一と想定しても良い．工場の操業期間を T とすると、時刻 t で操業を開始した工場から生み出される総キャッシュフローの期待現在価値は時刻 t で

$$X(t) = E_t \int_0^T \pi(t+s)e^{-\mu s}ds$$

である．ここで μ は当該投資プロジェクトに対する割引率である．π に伊藤の公式を適用すれば、

$$\frac{d\pi}{\pi} = \{\gamma\alpha_\theta + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma_\theta^2\}dt + \gamma\sigma_\theta dz_\theta$$

であるので、

$$E_t\pi(t+s)e^{-\mu s} = \pi(t)\exp\{\gamma\alpha_\theta + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma_\theta^2\}s - \mu s\}$$

が成り立っている．よって、

$$X(t) = k\frac{\theta^\gamma(t)}{\alpha_X - \mu}\{e^{(\alpha_X-\mu)T} - 1\}$$

が得られる．ここで、

$$\alpha_X = \gamma\alpha_\theta + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma_\theta^2$$

である．現在価値が有限の大きさにとどまるためには、$\alpha_X < \mu$ が必要である．以下、これを仮定する．X に伊藤の公式を適用すると、

$$\frac{dX}{X} = \alpha_X dt + \sigma_X dz_\theta \quad (43)$$

が成立する．ただし、$\sigma_X = \gamma\sigma_\theta$ である．

工場を建設するための投資資金が現在時点で確定できず、不確実を伴っていることが多い．ここで、必要な投資資金 K が確率微分方程式

$$\frac{dK}{K} = \alpha_K dt + \sigma_K dz_K \quad (44)$$

に従うと仮定する．dz_K は投下資金に伴う不確実性を支配する標準ウイーナー過程の増分である．最適投資タイミングの問題は

$$J(t_0) = e^{-\mu t_0}E_0\max[X(t_0) - K(t_0), 0]$$

を最大にする行使時刻 t_0 を求めることである．動的計画法を用いて解く．価値関数を

$$V(X,K,t) = \max_{t_0} e^{-\mu(t_0-t)}E_t\max[X(t_0) - K(t_0), 0], \quad 0 < t < t_0$$

とおくと、ハミルトンーヤコビの方程式

$$V_t + \max_{t_0}[V_X\alpha_X X + V_K\alpha_K K + \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2 + \frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2K^2 + V_{XK}XK\sigma_{XK}] = \mu V$$

が得られる．パラメター α_X, σ_X, α_K, σ_K, σ_{XK} が時間に依存しない限り、$V_t=0$ が成り立つので、

$$\max_{t_0}[V_X\alpha_X X+V_K\alpha_K K+\frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2+\frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2K^2+V_{XK}XK\sigma_{XK}]=\mu V \tag{45}$$

となる．

複製ポートフォリオの手法で類似の偏微分方程式を導出する．投資プロジェクトのオプション1単位、生産物 N_1 単位のショート・ポジション、投資財 N_2 単位のショート・ポジションからなるポートフォリオを作成する．伊藤の公式から

$$\begin{aligned}d(V-N_1X-N_2K)&=dV-N_1dX-N_2dK\\&=(V_X-N_1)dX+(V_K-N_2)dK \quad + \quad [V_t+\frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2+\frac{1}{2}\sigma_K^2V_{KK}K^2+V_{XK}XK\sigma_{XK}]dt\end{aligned}$$

を得る．$N_1=V_X$, $N_2=V_X$ とすると、このポートフォリオはリスクフリーとなる．ショート・ポジションを維持するためには、生産物および投資財の貸与に対して convenience yiled を払う必要があるので、このポートフォリオの保有から得られる収益率は

$$\begin{aligned}d(V-N_1X-N_2K)-(N_1\delta_1X+N_2\delta_2K)dt \quad = \quad &[V_t-\delta_1V_XX-\delta_2V_KK\\&+\frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2+\frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2K^2+V_{XK}XK\sigma_{XK}]dt\end{aligned}$$

である．δ_1 は X に対するコンビニエンス・イールド、δ_2 は K に対するコンビニエンス・イールドの大きさである[25]．このポートフォリオはリスクフリーなので、その収益は $r(V-N_1X-N_2K)dt$ とならなければならない．この条件から、オプションの価値を支配する偏微分方程式

$$V_t+(r-\delta_1)V_XX+(r-\delta_2)V_KK+\frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2X^2+\frac{1}{2}V_{KK}\sigma_K^2K^2+V_{XK}XK\sigma_{XK}=rV \tag{46}$$

が得られる．パラメター α_X, σ_X, α_K, σ_K, σ_{XK} が時間に依存しない限り、投資オプションの価値 $V(X,K,t)$ は時間に依存しないので、$V_t=0$ となっている．

偏微分方程式 (45) と偏微分方程式 (46) は全く同一形式の方程式である．異なるのは、係数のみである．偏微分方程式 (45) における α_X, α_K, μ は偏微分方程式 (46) での $r-\delta_1$, $r-\delta_2$, r にそれぞれ対応している．偏微分方程式 (45) の導出においては、X と K を保有することに伴うコンビニエンス・イールドが無視されており、割引率 μ が適切に定義されていない．他方で、偏微分方程式 (46) の導出では、それらの要素が取り込まれている．こうしたことの故に、形式は同一でも、用いられる係数に相違が生じる。このことから、動的計画法を用いる場合、コンビニエンス・イールドを含めて、X と K を支配する確率微分方程式は

$$\frac{dX}{X}=(r-\delta_1)dt+\sigma_Xdz_X \tag{47}$$

$$\frac{dK}{K}=(r-\delta_2)dt+\sigma_Kdz_K \tag{48}$$

と定式化すべきである．そして、割引率はリスクフリー利子率を採用すべきであると言うことになる．この定式化は、ファイナンス理論での確率中立測度、いわゆるマーチンゲール測度を用いたデリバティブ価格決定理論における定式化に対応している．

投資プロジェクトが実行される時刻では

$$V(X,K)=X-K$$

[25]コンビニエンス・イールドをどのように定義すべきかという議論は残る．通常、コンビニエンス・イールドは、当該資産が実際に生み出す収益率の期待値と、当該資産のリスクと同一リスクを持つ金融資産の均衡収益率の期待値 (CAPM より計算される) との差異として定義されている．ここでは、$\delta_1=r+\lambda\sigma_{\mathrm{X}}\rho_{\mathrm{X\,M}}-\alpha_{\mathrm{X}}$, $\delta_2=\lambda\sigma_{\mathrm{K}}\rho_{\mathrm{K\,M}}-\alpha_{\mathrm{K}}$ としている．λ はリスクの市場価格である．

が成立し[26]、関数 V が滑らかに連続している性質を用いれば、

$$V_X(X,K)=1,\ V_K(X,K)=-1$$

が成立しなければならない．これらが偏微分方程式の境界条件である．

微分方程式 (46) の一般的な解を解析的に求めることは容易ではない．しかし、ここでの問題では、$V(X,K)$ が X と K に関して 1 次同次なので、解析解を容易に求められる．任意の係数 a に対して、$X'=aX,\ K'=aK$ とおいて、問題を再定式化すると、その問題に対する解は、上記の問題の解と同一となることが分かる．この事実を活用して、

$$V(X,K)=Kv(x),\ x\equiv X/K$$

とおく．関係式

$$\begin{aligned} V_X &= v'(x),\ V_K=v(x)-xv'(x), \\ V_{XX} &= v''(x)/K,\ V_{XK}=-xv''(x)/K,\ V_{KK}=x^2v''(x)/K \end{aligned}$$

が成立する．これらの関係式を微分方程式 (46) に代入して、整理すると、

$$\frac{1}{2}(\sigma_X^2+\sigma_K^2-2\sigma_{XK})x^2v''(x)+(\delta_2-\delta_1)xv(x)-\delta_2v(x)=0 \tag{49}$$

が得られる．これは通常の 2 階常微分方程式なので、容易に解ける．境界条件は

$$v(x)=x-1$$

および

$$v'(x)=1,\ v(x)-xv'(x)=-1$$

となる．

$$v(x)=Ax^{\beta}$$

とおくと、上の 2 階常微分方程式から、指数 β は

$$\frac{1}{2}(\sigma_X^2+\sigma_K^2-2\sigma_{XK})\beta(\beta-1)+(\delta_2-\delta_1)\beta-\delta_2=0$$

を満たさなければならない．この特性方程式の解を $\beta_1,\ \beta_2$ とする．大きい方の解を β_2 とすると、$\beta_1<0,\ \beta_2>1$ となる[27]．$v(0)=0$ でなければならないので、関数 v において指数 β_1 の項の係数はゼロとなる．よって、

$$v(x)=Ax^{\beta_2}$$

である．これより、

$$V(X,K)=AK(X/K)^{\beta_2}$$

である．$x\geq\bar{x}$ のとき投資が実行されるとすると、投資が実行される時刻では、$v'(\bar{x})=1$ だから

$$A\beta_2\bar{x}^{\beta_2}\bar{x}^{-1}=1$$

であるので、$v(\bar{x})=\bar{x}/\beta_2$ となる．さらに、境界条件 $v(\bar{x})=\bar{x}-1$ より

$$\bar{x}=\frac{\beta_2}{\beta_2-1}$$

[26] V が時間 t に依存しないので、時間パラメターは省略している．
[27] 条件 $\delta_1>0$ が成立していると仮定した．

が得られる．このことから、投資は

$$\frac{X}{K} \geq \bar{x} \equiv \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} > 1$$

が満たされる時刻で実行される．ここで、

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_K^2 - 2\sigma_{XK}$$

である．$f(\beta_2, \sigma) \equiv (1/2)\sigma^2\beta_2(\beta_2 - 1) + (\delta_2 - \delta_1)\beta_2 - \delta_2 = 0$ の両辺を σ で全微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\frac{\partial \beta_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$$

が得られる．ここで、

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2} = \sigma^2 \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}} > 0$$

であり、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \sigma\beta_2(\beta_2 - 1) > 0$$

なので、

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \sigma} < 0$$

となることが分かる．つまり、σ が増大すると、β_2 が減少する．したがって、$\beta_2/(\beta_2 - 1)$ は増大する．このことは、比率 X/K に関するリスクのボラティリティーが増大すると、それにつれて、投資の実行時期が先送りされることを意味する[28]．時刻 t における収益の現在価値は

$$X(t) = k\frac{\theta^\gamma(t)}{\delta_1}\{1 - e^{-\delta_1 T}\}, \quad \delta_1 = \mu - \alpha_X$$

であるから、最適な投資の実行時期は、確率過程 $\theta(t)$ のサンプル経路が

$$k\frac{\theta^\gamma(t_0)}{\delta_1}\{1 - e^{-\delta_1 T}\} \geq \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1}K(t_0)$$

を満たす t_0 となる．

7　事例３：２段階複合リアル・オプションズ

前節での投資プロジェクト・オプションのモデルでは、投資プロジェクトが生み出すキャッシュフローの現在価値計算の中には、操業停止オプションの価値および生産からの撤退オプションの価値は含まれていなかった．投資プロジェクトが実際に実行された後に、操業を停止したり、あるいは生産から撤退して設備を売却するオプションを取ることは可能である．このような場合、投資オプションの価値は操業停止オプションの価値および生産からの撤退オプションの価値にも依存する．このように、ほとんどの投資オプションは複合オプションとしての構造をもつことになる[29]．ここで、このような複合オプションを考慮したオプショ

[28]詳しくは、MacDonald and Siegel(1986) および Dixit and Pindyck(1994) を参照してください．

[29]金融資産を対象とする複合オプションの評価方法に関しては、Carr(1988)、Geske(1979) および Margrave(1978) などの研究でオプション価格の評価公式が与えられている．Trigeorgis(1996) の第 6 章で、２段階複合オプションズの価格付けに対するより一般的な公式が導出されている．

ン価格の確率計算の事例を鉱山開発投資プロジェクトの評価問題から取り上げる．開発対象となっている鉱山から産出される鉱物商品 (例えば、銅や石炭、原油) の直物価格 P は以下の幾何ブラウン運動

$$\frac{dP}{P} = \alpha_P dt + \sigma_P dz_P \tag{50}$$

に従う．dz_P は商品価格のリスクを支配する標準ウイーナー過程の増分である．鉱物商品を在庫として保有することはコンビニエンス・イールド C を生む．このコンビニエンス・イールドは商品の直物価格の関数 $C(P,t)$ であると仮定する．簡単化のために、$C(P) = \delta P$ とする．この商品の先物価格、時刻 T で受け渡される商品の時刻 t における価格を $F(P,\tau)$, $\tau = T - t$ とする．伊藤の公式を適用すると、

$$dF = (-F_\tau + \frac{1}{2}F_{PP}\sigma_P^2 P^2)dt + F_P dP$$

となる．商品を 1 単位購入し、$1/F_P$ 単位の先物契約をショート･ポジションで保有する投資家は時間 $(t, t+dt)$ の間に収益率

$$\frac{dP}{P} + \frac{\delta P dt}{P} - \frac{dF}{PF_P} = (PF_P)^{-1}[F_P \delta P - \frac{1}{2}F_{PP}\sigma_P^2 P^2 + F_\tau]dt$$

を得ることができる．左辺の第 2 項は商品を保有することから得られるコンビニエンス・イールドの大きさを表す．このポートフォリオにはリスクがないので、収益率はリスクフリー利子率 r に等しい．このことから、偏微分方程式

$$\frac{1}{2}F_{PP}\sigma_P^2 P^2 + F_P(r - \delta)P - F_\tau = 0$$

が成立する．境界条件は

$$F(S, 0) = P$$

である．この式を式 (50) に代入すると、先物価格が満たすべき確率微分方程式

$$dF = F_P(\alpha_P - r + \delta)Pdt + F_P\sigma_P P dz_P \tag{51}$$

が得られる．

鉱山を操業しているときには、生産量 q は区間 $[\bar{d}, \underline{d}]$ の間の値を取りうるとする．操業停止しているときの生産量はゼロである．操業中の鉱山を操業停止する際には、操業を停止するための調整費用 K_1 が発生するととも、生産を再開する際にも生産再開のための費用 K_2 がかかる．このことから、鉱山の価値 V は、現在操業中であるか、操業停止中であるかに依存する．鉱山の埋蔵量を Q とし、資源の埋蔵量に関する技術的経済的なリスクは存在しないと仮定する．鉱山の価値 V は, 鉱山が産出する鉱物商品の市場価格 P および埋蔵量 Q に依存する．同時に、この価値はどのような操業政策を採用するかにも依存する．鉱山の操業政策を ψ と表記する．生産を行なうオプションを $j = 1$、操業を停止するオプションを $j = 0$ で表現すると、操業政策 ψ は、各時刻 t において、j の値を定めることと、生産するときの最適な生産量水準 q^* を定めることである．各時刻 t において j の値を定めることは、操業停止オプションが発動されるときの臨界的な価格水準 $P_1(Q,t)$、操業再開オプションが行使される臨界価格 $P_2(Q,t)$、および閉鎖中の鉱山から撤退するオプションが発動される臨界価格 $P_0(Q,t)$ の値を定めることに他ならない．$\psi \equiv \{q, P_0, P_1, P_2\}$ と表現できる．操業停止と撤退の相違点は、前者の場合には鉱山を維持するための費用が必要とされるが、後者の場合には費用がかからないことにある[30]．時刻 t での鉱山からのキャッシュフローを $\pi(P,Q,t;j,\psi)$ と表記する．Brennan and Schwartz に従って、

$$\pi(P,Q,t;j,\psi) = q(P - A) - M(1 - j) - \xi_j V - T$$

[30]撤退する場合、鉱山の諸施設を中古市場で売却することもできる．ここでは、売却収益と撤退費用の差額がゼロであると仮定している．

と定義する．ここで、A は平均生産費用、M は操業中止での維持費用、ξ_j は鉱山に対する比例的資産税 (資産額 V に対する)、T は鉱山のロイヤルティーおよび法人税である．課税額の内訳については後で触れる．鉱山の埋蔵量 Q は生産に伴って

$$dQ = -qdt$$

に従って減少する．この定式は、埋蔵量に関する不確実性が存在しないことを前提とする．埋蔵量に関する技術的経済的不確実性の問題はここでは無視する[31]．

鉱山の価値 $V(P,Q,t)$ を支配する方程式を導出するために、ここで、鉱山を所有する一方で、V_P/F_P 単位の先物商品契約のショート・ポジションを保有するポートフォリオ $Y = V - (V_P/F_P)F$ を作成する．このポートフォリオの瞬時的収益は、式 (51) を用いると、

$$dV + \pi - \frac{V_P}{F_P}dF = [\frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 V_{PP} - qV_Q + V_t + q(P-A) - M(1-j) - T - \xi_j V + (r-\delta)PV_P]dt$$

と計算される．この収益には不確実性がない．よって、このポートフォリオの収益はリスクフリー利子率× V に等しい．この条件から、お馴染みの偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 V_{PP} + (r-\delta)PV_P - qV_Q + V_t + q(P-A) - M(1-j) - T = (r+\xi_j)V \tag{52}$$

が導出できる．

$$V(P,Q,t) \equiv \max_{\psi} V(P,Q,t;\ 1,\psi),$$
$$W(P,Q,t) \equiv \max_{\psi} V(P,Q,t;\ 0,\psi)$$

と定義すると、$V(P,Q,t)$ は鉱山が操業中であるときの、時刻 t での鉱山の現在価値、$W(P,Q,t)$ は鉱山が操業停止中であるときの、鉱山の現在価値を表現している．従って、

$$\max_{\psi}[\frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 V_{PP} + (r-\delta)PV_P - qV_Q + V_t + q(P-A) - T] = (r+\xi_1)V, \tag{53}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 W_{PP} + (r-\delta)PW_P + V_t - M = (r+\xi_0)W \tag{54}$$

が成立している．境界条件は

$$\begin{aligned} W(P_0,Q,t) &= 0, & (55)\\ V(P_1,Q,t) &= \max[W(P_1,Q,t) - K_1(Q,t), 0], & (56)\\ W(P_2,Q,t) &= V(P_2,Q,t) - K_2(Q,t) & (57) \end{aligned}$$

とならなければならない．価値関数が滑らかに接続する条件を課すと、

$$\begin{aligned} W_P(P_0,Q,t) &= 0, & (58)\\ V_P(P_1,Q,t) &= W_P(P_1,Q,t),\ W(P_1,Q,t) \geq K_1(Q,t) \text{ のとき；} & (59)\\ &= 0, \quad W(P_1,Q,t) < K_1(Q,t) \text{ のとき}, & \\ W_P(P_2,Q,t) &= V_P(P_2,Q,t) & (60) \end{aligned}$$

[31] 埋蔵量に関する技術的経済的不確実性を明示的にモデルに導入した事例に関しては、Cortazar, et. al.(2001) を参照してください．

が成立する必要がある．当然ながら、埋蔵量がゼロになったときには、鉱山の価値はゼロなので、

$$V(P,0)=W(P,0)=0$$

である．平均費用 A、維持費用 M、および操業切り替えにかかる費用 K_1, K_2 が時間に依存する時にのみ、鉱山の価値は時間の関数となる．以下では、インフレなどの価格変動が存在せず、これらの費用は時間に依存しないと仮定する．$V_t=0$ となる．

偏微分方程式 (53) および (54) の解析解を一般的に求めることはできない．ここでは、解析解を求めるために、幾つかの簡単化のための仮定をおく．まず、$Q=\infty$ という極端な仮定をおくことにする．価値関数 V は埋蔵量 Q に依存しないことになる．課税システムに関して、

$$T(q,P)=t_1qP+t_2q\{(1-t_1)P-A\}$$

と仮定する．ここで、t_1 はロイヤルティー支払い率、t_2 は法人税率である．さらに、生産量に関して、操業中の生産量は $q=q^*$ と固定されており、閉鎖中の生産量はゼロとする[32]．この仮定の下で、式 (53) は

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2V_{PP}+(r-\delta)PV_P+q^*(1-t_1)(1-t_2)P-q^*A(1-t_1)=(r+\xi_1)V \tag{61}$$

と簡単化される．閉鎖中の鉱山の維持費用がゼロであるとする簡単化の仮定 $(M=0)$ をおくと、(54) は

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2W_{PP}+(r-\delta)PW_P=(r+\xi_0)W \tag{62}$$

に簡単化される．微分方程式 (62) の解が

$$W(P)=B_1P^{\beta_1}+B_2P^{\beta_2}$$

となり、(61) の解が

$$V(P)=B_3P^{\beta_1^*}+B_4P^{\beta_2^*}+\frac{mP}{\xi_1+\delta}-\frac{n}{\xi_1+r}$$

になることは容易に分かる．ここで、$m=q^*(1-t_1)(1-t_2),\ n=q^*A(1-t_1)$ とおいた．ただし、

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2+\frac{2(r+\xi_0)}{\sigma_P^2}};\quad \beta_2=\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2}-\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2+\frac{2(r+\xi_0)}{\sigma_P^2}},\\ \beta_1^* &= \frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2+\frac{2(r+\xi_1)}{\sigma_P^2}};\quad \beta_2^*=\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2}-\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2+\frac{2(r+\xi_1)}{\sigma_P^2}}\end{aligned}$$

である．資産税率が $(\xi_0=\xi_1)$ となっているケースでは、$\beta_1=\beta_1^*,\ \beta_2=\beta_2^*$ となる．以下、このケースを仮定しよう．前節まで考察してきた手続きを繰り返せば、$\beta_1>1,\ \beta_2<0$ および $B_2=B_3=0$ とならなければならないことも分かる．よって、

$$W(P) = B_1P^{\beta_1}, \tag{63}$$

$$V(P) = B_4P^{\beta_2}+\frac{mP}{\xi+\delta}-\frac{n}{\xi+r}. \tag{64}$$

係数 $B_1,\ B_4$ と、操業切り換えのための臨界価格 $P_1,\ P_2$ は境界条件 (56, 57) および (59, 60) から求めることができる．

[32]費用関数が生産量の凸関数であれば、最適な生産量が存在する．この場合、解析解を得ることは困難である．Brennan and Schwartz(1985) が示したように、費用関数が２次関数のときには、生産量は２段階で切り換えられる．

投資プロジェクトを評価するためには、投資から得られるキャッシュフローの現在価値の大きさと投資の実行に必要な費用を比較する必要がある．今までの議論から、投資プロジェクトが生み出すキャッシュフローの現在価値の大きさは $V(P,Q,t)$ で与えられることが分かっている．投資に必要な費用を $I(P,Q,t)$ と表現する．鉱山の採掘権を購入するとき、いつ鉱山開発の投資を実行すべきかは、鉱物商品の市場価格の大きさに依存する．未開発鉱山の採掘権の価値を $X(P,Q,t)$ と表現する．

$$X(P,Q,t)=\max_{t_0} e^{-\mu(t_0-t)}\max[V(P,Q,t_0)-I(P,Q,t_0),0].$$

鉱山の価値 $V(P,Q,t)$ を支配する偏微分方程式を導出したのと同じ方法で、投資オプションの価値 $X(P,Q,t)$ が満たすべき偏微分方程式を導出する．鉱山の採掘投資権を所有する一方で、X_P/F_P 単位の先物商品契約のショート・ポジションを保有するポートフォリオ $Y=X-(X_P/F_P)F$ を作成する．このポートフォリオの瞬時的収益は、式 (51) を用いると、

$$dX-\frac{V_P}{F_P}dF=[\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2X_{PP}+(r-\delta)PX_P+X_t]dt$$

と計算される．この収益には不確実性がない．よって、このポートフォリオの収益率はリスクフリー利子率に等しくならなければならない．よって、

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2X_{PP}+(r-\delta)PX_P+X_t=rX.$$

商品価格がゼロになるとき、鉱山の価値はゼロなので、

$$X(0,Q,t)=0$$

であり、採掘権の有効期限が時刻 T に切れるときには、

$$X(P,Q,T)=0$$

となる．投資が実行される市場価格が P^I であるならば、境界条件

$$X(P^I,Q,t)=V(P^I,Q,t)-I(P^I,Q,t)$$

が成立している．価値関数の平滑性から

$$X_P(P^I,Q,t)=V_P(P^I,Q,t)-I_P(P^I,Q,t)$$

も成立する必要がある．ここで、上での簡単化 (パラメターの定常性) の仮定を再び用いると、$X_t=0$ であり、偏微分方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2P^2X_{PP}+(r-\delta)PX_P=rX.$$

という常微分方程式になる．この方程式の解は

$$X(P)=A_1P^{\tilde{\beta}_1}+A_2P^{\tilde{\beta}_2}$$

なる形式を持つ． ここで、

$$\tilde{\beta}_1=\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2+\frac{2r}{\sigma_P^2}};\quad \tilde{\beta}_2=\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2}-\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma_P^2})^2+\frac{2r}{\sigma_P^2}}$$

$X(0) = 0$ だから、$A_2 = 0$ である．投資額 I が市場価格 P に依存せず、総埋蔵量 Q にも依存しないと仮定するならば、上の一般的な境界条件から、

$$A_1 P^{\tilde{\beta}_1} = B_4 P^{\beta_2} + \frac{mP}{\xi+\delta} - \frac{n}{\xi+r} - I, \tag{65}$$

$$A_1 \tilde{\beta}_1 P^{\tilde{\beta}_1 - 1} = B_4 \beta_2 P^{\beta_2 - 1} + \frac{m}{\xi+\delta} \tag{66}$$

がこのケースの具体的な境界条件となる．この境界条件から、係数 A_1 の値、および投資を実行するときの臨界価格 P^I が定まる．係数 A_1 を消去すると、

$$(\tilde{\beta}_1 - \beta_2) B_4 P^{\beta_2} + (\tilde{\beta}_1 - 1)\frac{mP}{\xi+\delta} - \tilde{\beta}_1 (\frac{n}{\xi+r} + I) = 0$$

なる臨界市場価格を定める関係式を得ることができる．この関係式を I に関して解析的に解くことはできないので、数値解析が必要である．

8　事例４：長期的投資プロジェクトのリアル・オプション

以上までは、投資プロジェクトが一括投資として短時間のうちに実現可能であると想定できるような投資プロジェクトの事例を考察してきた．投資プロジェクトが長期に渡って維持される場合、投資費用に関する不確実性が重要であり、投資プロジェクトの途中段階において、プロジェクトを放棄するような政策が望ましいことも起こりうる．ここでは、そうした事例を取り上げる．前節で取り上げた投資タイミングの事例では、投資費用が初期時点では不確実性を伴っているとしても、投資プロジェクトは短期的にあるいは瞬時的に実行可能であると想定されていた．もし投資プロジェクトが長期にわたって続行されなければならない場合、どれほどの総投資額が実際に必要とされるかという不確実性問題だけのみならず、将来のどの時点で投資プロジェクトが完了できるのかという不確実性の問題も発生する．時刻 t において、投資プロジェクトが完了するまでに必要と予想される必要資額を K で表現する．言い換えると、$K(T) = 0$ となるような時刻 T で投資プロジェクトは完了する．時刻 t で予想される必要投資額 $K(t)$ は確率微分方程式

$$dK(t) = -I(t)dt + \sigma_K K(t) dz_K + \sigma_w \sqrt{I(t)K(t)}\, dw \tag{67}$$

に従うと仮定する[33]．ここで、$I(t)$ は時刻 t での投資額、dz_K は投資費用の中で要素価格等の変動に起因する不確実性を表現する標準ウイーナー過程の増分、dw は投資費用の技術的不確実性などを表現する標準ウイーナー過程の増分である．完成までに必要とされる投資額は実際に投資された額が増加すれば、減少する．上式の右辺第１項はこの事実を表現する．第２項は経済環境の変動に起因するリスクを表現し、このリスクは金融資産のリスクとある種の相関関係を持つと想定できる．第３項は、技術的なリスクを表現しているので、金融資産市場におけるリスクとは相関を持たない．このリスクは完全に分散化可能なので、このリスクに対するリスク・プレミアムはゼロである．投資プロジェクトが完了した後に生み出されるキャッシュフローの価値 (投資プロジェクトの価値）V は

$$dV(t) = \alpha_V V(t)dt + \sigma_V V(t) dz_V \tag{68}$$

に従うと仮定する．dz_V は標準ウイーナー過程の増分である．dz_V と dz_K は相関係数 ρ_{VK} を持つ．簡単化のために、瞬時的投資額 $I(t)$ は上限が k に定められていると仮定する．つまり、$k \geq I \geq 0$ とする．$F(V, K)$

[33] この定式化は、Pindyck(1993) が提案した投資費用に関する不確実性を表現するモデルであり、その後、多くの研究者によって活用されてきた．

を投資オプションの価値とする．投資オプションの価値は

$$F(V,K) = \max_I E_0[Ve^{-\mu T} - \int_0^T I(t)e^{-\mu t}dt] \tag{69}$$

と定義される．このときの、最大化の制約条件は、必要投資額 K のダイナミックスを支配する確率微分方程式 (67) と投資からの収益 V のダイナミックスを支配する確率微分方程式 (68) である．投資プロジェクトの完成時刻 T は $K(T) = 0$ を満たす確率変数である．ハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式は

$$\begin{aligned} V_t \quad + \quad & \max_{I(t)}[-I(t) + F_V\alpha_V V - F_K I(t)\alpha_V V \\ & + \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K] = \mu F \end{aligned}$$

となる．係数がすべて時間に依存しないので、$V_t = 0$ が成り立つ．

ここで、コンビニエンス・イールドを明示的にモデルに取り込むならば、このハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式は以下のように修正されなければならない．ポートフォリオ複製の手法を用いることにする．この手法が実現可能となるために、必要投資額 K と同一のリスクに支配される資産が存在し、その価格 X が

$$\frac{dX}{X} = \alpha_X dt + \sigma_X dz_K$$

に従うと仮定する．投資プロジェクトを 1 単位、n_1 単位の生産物のショート・ポジション、n_2 単位の資産 X のショート・ポジションから構成されるポートフォリオ Y を考える．$Y = F - n_1 V - n_2 X$.

$$\begin{aligned} dY &= dF - n_1 dV - n_2 dX \\ &= V_t dt + F_V dV + F_K dK \\ &\quad + [\frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K]dt - n_1 dV - n_2 dX \end{aligned}$$

このポートフォリオを保有することに伴って、投資支出＋コンビニエンス・イールド

$$I(t)dt + \delta_1 n_1 V dt + \delta_2 n_2 X dt$$

の支出が必要とされるので、期間 $(t, t+dt)$ におけるポートフォリオ Y の収益率は

$$\begin{aligned} V_t dt \quad & + \quad F_V\alpha_V V dt - F_K I dt \\ & + \quad (F_V - n_1)\sigma_V V dz_V + (F_K K\sigma_K - n_2 X\sigma_X)dz_K + F_K\sigma_w\sqrt{I(t)K(t)}dw \\ & + \quad [\frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K]dt \\ & - \quad [n_1\alpha_V V + n_2\alpha_X X + I + \delta_1 n_1 V + \delta_2 n_2 X]dt \end{aligned}$$

となる．ここで、$n_1 = F_V$, $F_K K\sigma_K = n_2 X\sigma_X$ とおくと、dz_V, dz_K の項が消去される．このとき、ポートフォリオの期待収益率はリスクフリー利子率と一致する必要がある[34]．よって、

$$\begin{aligned} V_t + F_V\alpha_V V - F_K I + \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2 V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2 K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2 I(t)K \\ -\alpha_V F_V V - \tilde{\alpha}_K F_K K - I - \delta_1 F_V V - \delta_2 F_K K = r(F - F_V V - F_K K) \end{aligned}$$

が成立する．ただし、$\tilde{\alpha}_K = \alpha_X\sigma_K/\sigma_X$ とおいた．コンビニエンス・イールドは

$$\delta_1 = r + \lambda\sigma_V\rho_{VM} - \alpha_V, \ \delta_2 = r + \lambda\sigma_X\rho_{XM} - \alpha_X$$

[34]技術的不確実性 dw に関するリスクは分散化可能なので、期待収益率に何の影響も与えない．

と与えられている．こうして、コンビニエンス・イールドを明示的にモデルに取り込むならば、ハミルトン - ヤコビ - ベルマンの方程式は、

$$\begin{aligned}\max_{I(t)}[-I(t) - F_K I(t) &+ F_V(r-\delta_1)V + F_K(r-\delta_2-\tilde{\alpha}_K)K \\ &+ \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2I(t)K] = rF\end{aligned}$$

と修正されなければならない．このハミルトン - ヤコビ - ベルマン方程式は投資 I の線形関数なので、最適な投資政策は

$$I(t) = \begin{cases} k, & \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2K - F_K - 1 \geq 0 \text{ の場合} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となる．$\frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2K - F_K - 1 = 0$ で与えられる $K^*(V)$ が投資のトリガー水準で、$K < K^*(V)$ になるとき、投資を続行する．ハミルトン - ヤコビ - ベルマン方程式は、$K = K^*(V)$ を境界として、$K > K^*(V)$ の場合,

$$F_V(r-\delta_1)V + F_K(r-\delta_2-\tilde{\alpha}_K)K + \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} = rF,$$

$K < K^*(V)$ の場合

$$\begin{aligned}-k - kF_K &+ F_V(r-\delta_1)V + F_K(r-\delta_2-\tilde{\alpha}_K)K \\ &+ \frac{1}{2}F_{VV}\sigma_V^2V^2 + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_K^2K^2 + F_{VK}VK\sigma_{VK} + \frac{1}{2}F_{KK}\sigma_w^2kK = rF\end{aligned}$$

と分離できる．投資プロジェクトが完成したとき、工場から生産が開始されるので、投資プロジェクトの価値は工場の価値 V に転化する．投資総額が無限大になるにつれて、投資プロジェクトの価値はゼロになる．また、工場からの収益がゼロに近づくにつれて、投資の価値はゼロとなる．これらをまとめると、境界条件は、

$$\begin{aligned} F(V,0) &= V, \\ \lim_{K\to\infty} F(V,K) &= 0, \\ \lim_{V\to 0} F(V,K) &= 0, \\ \frac{1}{2}F_{KK}(V,K^*)\sigma_w^2K^* - F_K(V,K^*) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

で与えられる． さらに、$F(V,K)$, $F_K(V,K)$ は $K^*(V)$ で連続であるという条件件が満たされる必要がある．

こうして定式化されたハミルトン - ヤコビ方程式を解析的に解くことは困難である．幾つかの特殊ケースに対しては、解析的な解を求めることができるが、一般的には数値計算が必要である．Pindyck(1993) は収益 V に不確実性が存在しないケース、つまり、$\alpha_V = 0$, $\sigma_V = 0$ のケースに対して、数値計算を用いて、F の具体的な関数形を描いている．

9　事例 5：多段階多重複合リアル・オプションズ

ここでは、異なる種類のリアル・オプションズが何段階にも渡ってシーケンシャルに連続している、より複雑な事例を取り上げる．Paddock, et. al.(1988) や Cortazar, et al(2001) が考察した鉱物資源鉱区の開発事例では、鉱物資源生産のための投資プロジェクトは、大きく分けて 3 種類の投資プロジェクト、つまり

埋蔵量や品質に関わる技術的調査を行なう探索投資、鉱区から資源を掘削するために必要な工場設備等を構築・設置するための建設投資、そして、実際に工場を稼動するための操業投資から構成されている．これらの多数の連続した投資がすべて成功裏に完了して始めて、投資からの収益が生まれる．この事例では、投資家が直面する不確実性としては、未開発鉱区で予想される資源の埋蔵量に関するリスク、および、生産された資源の市場価格に関するリスクが主として明示的にモデルに導入されている．探索投資は埋蔵量に関わるリスクと開発活動に関わる技術的リスクを消滅するために行なわれる．この探索投資が完了した段階では、埋蔵量と開発費用に関わる地学的・技術的なリスクは死滅し、埋蔵量は確定し、開発費用の積算はリスクなしで確定できると想定されている．それゆえ、探索投資が終了した後に直面するリスクは資源の市場価格リスクだけとなる[35].

Hsu and Scwartz(2003) で分析された製薬企業における R&D 投資の事例では、投資プロジェクトは３段階の意思決定ノードから構成されている．第１段階では、これから行なおうとしている新製品開発のための投資プロジェクトを実行すべきか否かを意思決定する．当然、R&D 活動の実行に必要とされる総費用と新製品の販売から得られる予想収益とを比較して、この新製品開発プロジェクトを開始すべきか否かを意思決定する．R&D 投資は、二つのフェーズから構成されている．第１フェーズでは、新製品開発のための基礎的な R&D 活動が行なわれ、製品化可能かどうかの研究がなされる．第１フェーズが完了すると、パテント獲得のためのの申請が行なわれ、第２フェーズに移行するか否かの意思決定が行なわれる．R&D の第２フェーズでは、新製品の商業生産の可能性、新製品の治験実験、およびパイロット生産の実験が行なわれる．R&D の第２フェーズが完了すると、新製品の生産が商業的に可能と判断された場合、新製品を市場に投入すべきかどうかの意思決定が行なわれれる．新製品の生産・販売計画が実施される場合、工場建設と広告活動の計画、流通・販売経路の確保のための実施計画が実行に移される．工場建設が完了すると、実際の生産が始まり、新製品販売からの収益が得られる．パテントの有効期限が切れるまでの期間では、独占的な収益を獲得できるが、パテントが消えた後は、この製品市場は競争市場となる．

現実の企業経営における意思決定では、複数のリアル・オプションズを管理する資本支出予算の問題が起こる. こうした複数種類のリアル・オプションズを管理するような事態では、各リアル・オプションが互いに相互依存する可能性の故に、企業全体としてのリアル・オプションズの総価値が各リアル・オプションの価値を単純に合計した値には必ずしも一致しない．このことがひいては、コーポレート・ファイナンスにおける企業戦略論、資本予算論における柔軟性の問題として重要な研究課題となる[36]． Trigeorgis(1993) は、経営戦略の柔軟性を複合リアル・オプションズの集合体として表現して、各リアル・オプション間における相互依存性を分析している．経営政策上でよく直面する各投資オプション、例えば、投資の延期オプション、工場建設からの撤退オプション、工場規模の縮小オプション、工場の拡大オプション、工場の他用途への変更オプションなどから成るリアル・オプションズの連鎖・集合体を取り上げ、リアル・オプションズの総価値が各リアル・オプションの価値を単純に合計した値には必ずしも一致しないこと、つまり各リアル・オプションが互いに相互依存している事実を数値計算を用いて示している．

[35]Paddock, et. al.(1988) の研究では、市場価格の不確実性だけが取り扱われているが、Cortazar, et al(2001) は市場価格のリスクおよび地学的・技術的なリスクの両方をモデルに導入している．

[36]Trigeorgis(1996) および Smit and Trigeorgis(2004) は、企業経営における柔軟性の問題をリアル・オプションの相互依存関係から理解することの重要性を指摘し、コーポレート・ファイナンスにおける資本支出予算問題をリアル・オプション・アプローチから再構成している．

10　終わりに

本稿では、市場構造が独占的あるいは完全競争的であることを想定していたので、寡占市場の特徴である各企業の意思決定間に見られる相互依存関係を無視してきた．各企業のリアル・オプションズが戦略的に相互依存する場合、ゲーム論的な枠組みが必要となる．生産物市場が寡占的な市場である場合、今までのモデル分析では重視されなかった論点が登場する．すなわち、投資時期を先送りしたときには、ライバル企業が当該市場における利潤機会を奪ってしまう可能性が生じる．産業組織論でよく知られている通り、不可逆的な投資にコミットすることが、ライバル企業が参入して得ようとする利潤機会を前もって先制的に確保して、ライバル企業の参入を阻止する戦略となりうる．また、新製品開発や製造効率改善を目指した R&D 投資プロジェクトに見られるように、最初に初期投資を実施した企業は、他企業に比較して、より多くの将来的成長機会の可能性を入手できる．投資が戦略的な先制権の確保や成長オプションとなるような場合には、投資を遅らせせることが投資オプションの価値を引き下げる効果をもつ．このようなメカニズムが働くケースにおいては、単純なリアル・オプション・モデルの結論は修正される必要があるので、どのように修正されるのかを理解するための研究が要請されることになる．Lambrecht and Perraudin(2003) は、先取りの可能性を持つ複占モデルを用いて、投資時期を決定する利潤の臨界値が、いわゆる NPV ルールで定める臨界値と単純なリアル・オプションモデルで計算される臨界値の間に位置することを示した．Weds(2002) は、成功の可能性をポアッソン過程で定式化したモデルで、パテントを獲得するための R&D 競争投資を分析している．このモデルでは、R&D 投資のオプション価値を引き下げるような作用が必ずしも優越的になるとは限らないことが示されている．寡占市場における企業間の戦略的な相互依存関係の下でのリアル・オプションズ・モデル分析に関しては、別稿において詳細に考察することにする．

引用文献

(1). Jonathan B. Berk, Richard C. Green and Vasant Naik(2004), Valuation and Return Dynamics of New Ventures, *Review of Financial Studies*, 17(1), 1-35.

(2). Fischer Black and Myron Scoles(1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

(3). Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz(1985), Evaluating Natural Resources Investment, *Journal of Business*, 58(2), 135-157.

(4). Peter Carr(1988), The Valuation of Sequential Exchange Opportunities, *Jounral of Finace*, 43(5), 1235-1256.

(5). Paul D. Childs, Steven H. Ott and Alexander J. Triantis(1998), Capital Budgeting for Interrelated Projects: A Real Options Approach, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33(3), 305-334.

(6). Paul D. Childs and Alexander J. Triantis(1999), Dynamic R& D Investment Policies, *Management Science*, 45(10), 1359-1377.

(7). K.L. Chung and R.J. Williams(1990), *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhauser.

(8). Gonnzalo Cortazar, Eduard S. Schwartz and Jaime Casassus(2001), Optimal Exploration Investments under Price and Geological-Technical Uncertainty: a Real Options Model, *R&D Management*, 31(2), 181-189.

(9). Avinash Dixit(1989), Entry and Exit Decisions under Uncertainty, *Journal of Political Economy*, 97(3), 620-638.

(10). Avinash K. Dixit and Robert S. Pindyck(1994), *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press.

(11). J. L. Doob(1953), *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons.

(12). Darrell Duffie(1992, 2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, the third edition, Princeton University Press.

(13). Wendell H. Fleming and Raymonnd W. Rishel(1975), *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag.

(14). Robert Geske(1979), The Valuation of Compound Options, *Journal of Financial Economics*, 7(1), 63-81.

(15). Jason C. Hsu and Eduardo S. Schwartz(2003), A Model of R&D Valuation and the Design of Research Incentives, Anderson School, UCLA, Working Paper.

(16). Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve(1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second edition, Springer-Verlag.

(17). Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve(1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag.

(18). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1975), *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press.

(19). Samuel Karlin and Howard M. Taylor(1981), *A Seccond Course in Stochastic Processes*, Academic Press.

(20). Brt Lambrecht and William Perraudin(2003), Real Options and Preemption under Incomplete Information, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 619-643.

(21). R. S. Liptser and A. N. Shiryayav(1977), *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Translated by A. B. Aries, Springer-Verlag.

(22). Sman Majd and Robert S. Pindyck(1987), Time To Build, Option Value, and Investment Decisions, *Journal of Financial Economics*, 18(1), 7-27.

(23). William Margrave(1978), The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, *Journal of Finance*, 33(1), 177-186.

(24). Robert McDonald and Daniel Siegel(1985), Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down, *International Economic Review*, 26(2), 331-349.

(25). Robert McDonald and Daniel Siegel(1986), The Value of Waiting to Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 101(4), 707-728.

(26). Robert C. Merton(1973a), An intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 41(5), 867-887.

(27). Robert C. Merton(1973b), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics*, 29, 141-183.

(28). Robert C. Merton(1990), *Continuous-Time Finance*, Blackwell.

(29). Marek Musiela and Marek Rutkowski(1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.

(30). Salih N. Neftci(2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, second edition, Academic Press.

(31). Bernt Øksendal(1985,2005), *Stoshatic Differential Equations*, sixth edition, Springer-Verlag.

(32). James L. Paddock, Daniel R. Siegel and James L. Smith(1988), Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases, *Quarterly Journal of Economics*, 103(3), 479-508.

(33). Robert S. Pindyck(1988), Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm, *American Economic Review*, 78(5), 969-985.

(34). Philip E. Protter(1990), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

(35). Daniel Revuz and Marc Yor(1991), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer.

(36). H.L. Royden(1968), *Real Analysis*, second edition, Macmillan.

(37). Han T.J. Smit and Lenos Trigeorgis(2004), *Strategic Investment: Real Options and Games*, Princeton University Press.

(38). Eduardo S. Schwartz(2001), Patents and R&D as Real Options, Anderson School, UCLA, Working Paper.

(39). Steven E. Shreve(2004), *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer.

(40). Lenos Trigeorgis(1993), The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(1), 1-20.

(41). Lenos Trigeorgis(1996), *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press.

(42). Helen Weeds(1999), 'Reverse Hysteresis': R&D Invetment with Stochastic Innovation, Warwick University, Working Paper.

(43). Helen Weeds(2002), Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition, *Review of Economic Studies*, 69, 729-747.