『経済研究』（明治学院大学）第 139 号　2007 年
【研究ノート】

Nash から Arrow-Debreu へ：非協力ゲーム理論と一般均衡理論の基礎定理の理論的関係について

鈴　木　　　岳

Ⅰ．はじめに

本稿において我々は，非協力ゲーム及び一般均衡理論における，それぞれの均衡の存在定理の論理的関係について議論する。具体的には，Nash の学位論文における彼の結果，即ち今日彼の名前を冠して呼ばれる均衡の存在定理を用いて，競争市場におけるいわゆる Walras 均衡の存在定理を導出する過程を出来うる限り簡潔に示すことである。これは，実際に Arrow and Debreu (1954) が彼らの最初の市場均衡の存在定理の証明に用いた論理であって，従ってこの展開を明示的かつ簡潔に示すことは，20 世紀後半の理論経済学の最も重要な発展を，理論的のみならず歴史的観点から光を当てる意味合いを持つのである。従って本稿は理論家のみならず学説史家の諸氏にも読まれうるために，用いる全ての数学概念に自己完結的説明を与え，また不動点定理を除く全ての数学的結果に証明を与える。読者はこれらの諸結果を得るために必要な数学が本質的にはごく僅かなものであることを知るであろう。また，このことによって本稿が理論に関心を寄せる大学院生諸君の基礎的教材として役にたてば幸いである。

今世紀の数学は，「集合」の概念に立脚して展開された。集合とは，「相互にはっきりと区別できるもの」の集まりであり，そのようなものならば，何であっても良い。こうした極めて一般的な性格のために，今世紀の数学は，自然科学のみならず，社会科学に対しても非常に強力な手段となった。「時空座標」，「エネルギー」といった物理量のみならず，「財」，「消費者の選好」といった経済学的概念が集合を用いることによって数学的に精密にとらえることが可能となり，その結果，現代の経済学は言ってみれば「財と消費者の幾何学」として純粋に理論的な学問的探求の対象となった[1]。Nash 及び Arrow-Debreu の諸結果はその最も著しい成果なのである。

Ⅱ．数学的準備

集合を表すためにしばしば中括弧 $\{\ldots\}$ を用いる。{ リンゴ，バナナ }，{ グー，チョキ，パー } は集合であるが，{ 高い山，低い山 } は集合とは言えない。「x は集合 X の要素である」ことを，$x \in X$ と書き，また，集合 X, Y に対して，「$x \in X$ ならば $x \in X$」のとき，「X は Y の部分集合である」と言い，$X \subset Y$ と書く。「$X \subset Y$ かつ $Y \subset X$」の時，「X と Y は等しい」と言い，$X = Y$ と書く。また，

$$X \cup Y = \{x | x \in X \text{ または } x \in Y\},\ X \cap Y = \{x | x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$$

と定義する。要素を何も含まない集合を空集合と言い，$\emptyset$ と書く。いかなる集合 X に対しても，$\emptyset \subset X$ と約束する。集合 X, Y の直積 $X \times Y$ とは（順序を考慮した）対の集合 $\{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$ のことである。帰納的に，n 個の集合$X_2, \ldots, X_n$の直積$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \ldots \times X_n$が$\prod_{i=1}^{n} X_i = (\prod_{i=1}^{n-1} X_i) \times X_n$によって定義される。集合 X の部分集合 A について，$\{x | x \in X \text{ かつ } x \notin A\}$ を A の（X の中での）補集合と呼び，A^cと書く。

実数の集合については既知とし，それを $\mathbb{R}$ と記す。$\mathbb{R}$ の n 個の直積 $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ を$\mathbb{R}^n$と書く。その要素を n 次元ベクトルと言い，$(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$のように書く。また時には，$(x^k)$ のように簡単に書くこともある $(k = 1, \ldots, n)$。$\mathbb{R}^n$のベクトル $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ に対して，和とスカラー倍をそれぞれ

$$(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n),\ t(x^1, \ldots, x^n) = (tx^1, \ldots, tx^n)$$

と定義する。ただしここで t は任意の実数である。$\mathbb{R}^n$の部分集合 X が凸集合であるとは，

$$x, y \in X \text{ ならば，任意の } 0 \leq t \leq 1 \text{ に対して } tx + (1-t)y \in X$$

が成り立つことを言う。明らかに，一点からなる集合 $\{x\}$ 及び閉区間 $[0,1]$ は凸集合であり，また，二つの凸集合の直積は凸集合である。

$\mathbb{R}$ の有界部分集合 B について，全ての $x \in B$ に対して $x \leq y$ となるならば，集合 B は上に有界であると言い，$y \in \mathbb{R}$ を集合 B の上界と呼ぶ。上界の最小値を上限と呼び，$supB$ と書く。つまり，y が集合 B の上限であるとは，y は B の上界であり，もし z もまた B の上界であるならば，$y \leq z$ となることを言う。上に有界でない集合 X に対しては $supX = +\infty$ と約束する。同様に，全ての $x \in B$ に対して $x \geq y$ となるならば，X は下に有界と言い，y を B の下界と呼ぶ。下界の最大値を下限と言い，$infB$ と書く。下に非有界な集合 X に対しては $infX = -\infty$ である。上にも下にも有界な集合を単に有界と呼ぶ。

R^nのベクトル $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ に対して，それらの間の距離を

$$\|x - y\| = |x^1 - y^1| + \ldots + |x^n - y^n|$$

と定義する。$x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ に対して $\{y \in \mathbb{R}^n \| \|x - y\| < \epsilon\}$ を「x を中心とする半径 ϵ の開球」と呼び，$B(x, \epsilon)$ と書く。$\mathbb{R}^n$の部分集合 X が有界であるとは，

$$\text{或る実数}\ M>0\ \text{に対して，}x\in X\ \text{ならば}\ \|x\|\leq M\ \text{となる}$$

ことを言う。

言うまでもなく，上に述べた R の部分集合の有界性の定義は，この定義の特別な場合（$n=1$ の場合）である。また，二つの有界集合の直積は有界であることも明らかである。

$\mathbb{R}^n$のベクトル $x=(x^k)$ と $y=(y^k)$ について，それらの順序関係を，「全ての k について，$x^k\leq y^k$」の時 $x\leq y$，また「$x\leq y$ でかつ $x\neq y$」の時，$x<y$ と決める。また，「全ての k について$x^k<y^k$」の時，$x\ll y$ と定める。

自然数の集合 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ からR^nへの写像[2]を点列[3]と言い，$\{x_n\}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ のように書く。点列 $\{x_n\}$ とベクトル x についてどのような $\epsilon>0$ に対しても，或る自然数 $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geq N$ ならば $\|x_n-x\|\leq\epsilon$ が成り立つならば，「点列 $\{x_n\}$ はベクトル（点）x に収束する」，または「x は点列 $\{x_n\}$ の極限である」と言い，$x_n\to x$ 又は$\lim_{n\to\infty}x_n=$ などと書く。点列 $\{x_n\}$ から有限個または無限個の点を取り去った後，なお無限個の要素が残存している時，それを元の点列の部分列と言い，$\{x_{nk}\}$ などと書く[4]。

定理：有界集合に含まれる任意の点列には収束する部分列が存在する。

証明：今，$\mathbb{R}$ の有界集合 B に含まれる点列 $\{x_n\}\subset B$ を考えよう。B は有界だから，長さが L の区間 $I=\{x|-L/2\leq x\leq L/2\}$ が存在して $B\subset I$ となる。区間 I を，半分の長さの二つの区間 $I_1=\{x|-L/2\leq x\leq 0\}$ と$I_2=\{x|0\leq x\leq L/2\}$ に分けると少なくとも一方（例えばI_1）の区間に点列の無限個の点が含まれる。同様に，I_1を半分の長さの二つの区間に$I_{1,1},I_{1,2}$に分けるとそのうちの少なくとも片方に部分列の無限個の点が含まれる。この操作を続けていくと，長さが $L/2^n$の区間の系列ができ，明らかに $L/2^n\to 0$ だから，区間の列は或る一点 x に収束する[5]。各区間から一つずつ点を選んで，$\{x_n\}$ の部分列を作ると，これは x に収束する。（証明終わり）

上の証明を拡張して，$\mathbb{R}^n$の有界点列が収束部分列を含むことを証明することは，容易である。また，同様の仕方で，合 X に含まれる任意の点列が収束部分列を持つならば，X は有界であることを証明することができる。

$\mathbb{R}^n$の部分集合 X が閉集合であるとは，

$$X\ \text{の任意の点列}\ \{x_n\}\subset X\ \text{について，}x_n\to x\ \text{ならば}\ x\in X\ \text{となる}$$

ことを言う。

1 点からなる集合 $\{x\}$ 及び区間 $[0,1]$ は明らかに閉集合である。また，二つの閉集合の直積は閉集合であることを証明することも容易である。

閉集合の補集合は開集合と呼ばれる。また，$\mathbb{R}^n$の部分集合 X が有界でかつ閉集合である時，それをコンパクトと呼ぶ。ある集合 X がコンパクトであるのは，X に含まれる任意の点列が X に属するある点に収束する部分列を持つ時であり，その時に限る。有界集合の部分集合は勿論有界だから，コンパクト集合の任意の閉部分集合はコンパクトであることを注意しておく。

定義から明らかに，X が開集合であることは，「$x \in X$ ならば，ある $\epsilon > 0$ に対して，$B(x, \epsilon) \subset X$ である」ことと同値である。さらに，コンパクト集合 K について，$supK, infK \in K$ を示すことができる。

$X \subset \mathbb{R}^n$ の各々の要素 x に対して，$Y \subset \mathbb{R}^m$ の或る決まった要素 y を対応させる「規則」を関数または写像と言い，

$$f : X \to Y,\ y = f(x)$$

などと書く。この時，X を，関数 f の定義域，また Y をその値域と呼び，集合 $f(X) = \{y \in Y|$ ある $x \in X$ に対して $y = f(x)\}$ を関数 f の像と言う。関数 f が点 x で連続であるとは，

X の任意の点列 $\{x_n\}$ について，$x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$

が成り立つことを言う。関数 f が X の全ての点で連続である時，単に連続と言う。$x = f(x)$ を満たす $x \in X$ を関数 f の不動点と呼ぶ。コンパクト集合上の連続関数に関して，次の定理は重要である。

定理：コンパクト集合 K の上で定義された連続関数 $f : K \to \mathbb{R}$ は K に属する点で最大値及び最小値を取る。

証明：f の像 $f(K)$ がコンパクトであることを示そう。今，$\{y_n\}$ を像 $f(K)$ の任意の点列とし，$\{y_n\}$ が収束部分列を含むことを示そう。定義から，定義域 K のある点列 $\{x_n\}$ が存在して，$y_n = f(x_n)$ となる。K はコンパクトだから，$\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{nk}\}$ が取れて，$x_{nk} \to x$ となる。f の連続性より，$f(x_{nk}) \to f(x)$，即ち $\{f(x_{nk})\}$ は，$\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ の収束部分列である。よって K のコンパクト性が示された。上の問題によって，$supf(K) \in f(K)$ であるから，ある $\bar{x} \in K$ に対して，$f(\bar{x}) = supf(K)$ となり，明らかに f は $\bar{x}$ で最大値を取る。同様に f は，$infK$ を与える K の点で最小値を取る。（証明終わり）

$X \subset \mathbb{R}^n$ の各々の要素 x に対して，$Y \subset \mathbb{R}^m$ の或る部分集合 B を対応させる「規則」を対応と言い，

$$\phi : X \to Y,\ B = \phi(x)$$

と書く。関数とは，$\phi(x) = B$ が常に1点からなる集合 $\{y\}$ であるような特殊な対応に他ならない。その意味で，対応は関数の一般化である。$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X から $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合 Y への対応 ϕ が点 x で上半連続であるとは，「X の任意の点列 $\{x_n\}$ と Y の任意の点列 $\{y_n\}$ について，$y_n \in \phi(x_n)$, $x_n \to x, x, y_n \to y$ ならば $y \in \phi(x)$ が成り立つ」ことを言う。対応が全ての点で上半連続ならば，単に上半連続と言う。対応 $\phi : X \to Y$ が x で下半連続であるとは，「X の任意の点列 $\{x_n\}$ と Y の任意の点 y について，$x_n \to x, y \in \phi(x)$ ならば，ある Y の点列 $\{y_n\}$ が存在して，$y_n \in \phi(x_n), y_n \to y$ となる」ことを言う。対応 ϕ が X 内の全ての点で下半連続であるならば，対応が下半連続であると言い，上半連続かつ下半連続な対応を連続な対応と言う。また，$x \in \phi(x)$ を満たす点 x を対応 ϕ の不動点と言う。次の定理は位相幾何学の深い定理である。

定理（Brower）：$\mathbb{R}^n$ のコンパクトかつ凸の部分集合 X からそれ自身への連続関数には不動点が存在する。

角谷静夫はこの定理を対応の場合へ拡張した。

定理（角谷）：$\mathbb{R}^n$のコンパクトかつ凸の部分集合 X からそれ自身への上半連続対応 ϕ について，全ての x に対して $\phi(x)$ が非空，コンパクトかつ凸ならば，ϕ には不動点が存在する。

Brower の定理と角谷の定理（これらはしばしば不動点定理と呼ばれる）は理論経済学及びゲームの理論において広く用いられている基本的な結果であり，我々も角谷の不動点定理を用いて，Nash 均衡の存在及び一般均衡の存在を証明する。

Ⅲ．ゲーム理論

理論的研究対象としてのゲームは，プレイヤー，各プレイヤーの選び得る戦略，及び戦略の選択した結果に各プレイヤーが得る利得を特定することによって定まる。大まかに言えば，ゲーム理論とは，以下のような理論的モデルとして設定されたゲームの中で，各プレイヤーができるだけ大きな利得を得るために合理的な行動（戦略の選択）を行うことを想定して，その結果を研究する応用数学の一分野である。$N=\{1,\ldots,n\}$ をプレイヤーの集合とする。また，プレイヤー i の純粋戦略の集合を$S^i=\{s_i^1,\ldots,s_i^{m_i}\}$とする。つまり，プレイヤー i は，m_i個の戦略を持っていると仮定する。この時，$s_i\in S_i$として[6]，各プレイヤーの選んだ戦略の組を $s=(s_1,\ldots,s_n)\in\prod_{i=1}^n S_i$と書き，戦略プロフィールと呼ぶ。戦略プロフィール s に対するプレイヤー i の利得として実数値$u_i(s)$ が定まっている。これはつまり，各プレイヤーがs_iの戦略を選択している，従って，戦略プロフィールが $s=(s_1,\ldots,s_n)$ の時，プレイヤー i の得る利得が$u_i(s)$ であることをいうのである。（戦略形）ゲーム g とは，戦略の集合s_iと利得関数u_iの組$(s_i,u_i)_{i=1}^n$のことである。

戦略プロフィール $s=(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n)$ が与えられた時，記号s_{-i}で i を除いた全てのプレイヤーの戦略の組を表すものとする。つまり，

$$s_{-i}=(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$$

である。この記号s_{-i}に対して，元の戦略プロフィール s は，$s=(s_i,s_{-i})$ と書くことができる。プレイヤー i のある戦略t_iが，s_{-i}に対する最適反応であるとは，

$$\text{任意の戦略} s_i\in S_i \text{に対して，} u_i(t_i,s_{-i})\geq u_i(s_i,s_{-i}) \text{となる}$$

ことを言う。

定義：戦略プロフィール$s_*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ が Nash 均衡であるとは，全てのプレイヤー i について，s_i^*がs_{-i}^*に対する最適反応であることである。

つまり，Nash 均衡とは次の条件を満たす戦略の組$s_*=(s_i^*,\ldots,s_{-i}^*)$ のことである。

$$\text{任意の戦略} s_i\in S_i \text{に対して，} u_i(s_i^*,s_{-i}^*)\geq u_i(s_i,s_{-i}^*),\ i=1,\ldots,n$$

ところで，純粋戦略の概念は，次の混合戦略の概念に一般化される。

定義：戦略集合s_i上の確率分布を混合戦略と呼ぶ。即ち，写像

$$\sigma_i : S_i \to \mathbb{R},\ s_i^j \mapsto \sigma_i(s_i^j)$$

でかつ，$\sigma_i(s_i^j) \geq 0,\ \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^j) = 1$ を満たすものを言う。

混合戦略とは，プレイヤー達の確率的な行動を表現するものであり，プレイヤー i が戦略s_i^jを選択する確率が$\sigma_i(s_i^j)$ なのである。

勿論，純粋戦略は，混合戦略の特別な場合と見なすことができる。

今，プレイヤー i が混合戦略σ_iを選んでいるとし，混合戦略プロフィールを $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ と記す。この時，プレイヤー i の純粋戦略s_iが確率$\sigma_i(s_i)$ で実現する。すると，純粋戦略のプロフィール $(s_1,\dots,s_n)$ は確率

$$\sigma_i(s_1)\dots\sigma_n(s_n)$$

で実現することになる。こうして，我々は次の定義に導かれる。

定義：プレイヤー i の混合戦略プロフィール $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ に対する期待利得v_iとは

$$v_i(\sigma) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_1(s_1)\dots\sigma_n(s_n)u_1(s_1,\dots,s_n)$$

のことである。

混合戦略の Nash 均衡の定義は前に与えた純粋戦略のそれにおいて，純粋戦略を混合戦略に，利得を期待利得にそれぞれ置き換えることによって得られる。

我々の目標は次に述べる Nash の学位論文の結果を証明することである。

定理（Nash）：任意のゲーム $\mathrm{g}=(S_1,\dots,S_n,u_1,\dots,u_n)$ に対して，混合戦略の Nash 均衡が存在する。

証明は先ず $n=2,\ m_1=m_2=2$ のケースについて行うことにする。記号を簡略にするために，$u_i(s_1^j, s_2^k)=u_i(j,k)\ (i,j,k=1,2),\ \sigma_1(s_1^1)=p,\ \sigma_1(s_1^2)=1-p,\ \sigma_2(s_2^1)=q,\ \sigma_2(s_2^2)=1-q$ と置く。

この時，各プレイヤーの期待利得は定義から，

$$v_1(\sigma)=pqu_1(1,1)+p(1-q)u_1(1,2)+(1-p)qu_1(2,1)+(1-p)(1-q)u_1(2,2),$$
$$v_2(\sigma)=pqu_2(1,1)+p(1-q)u_2(1,2)+(1-p)qu_2(2,1)+(1-p)(1-q)u_2(2,2)$$

となる。

そこで，プレイヤー 1 の反応関数（写像）$\phi_1 : [0,1] \to [0,1]$ を

$$\phi_1(q)=\{p \in [0,1] \mid p \text{ は与えられた } q \text{ に対して } [0,1] \text{ の範囲で} v_1(\sigma) \text{ を最大にする}\}$$

と定義する。同様に，プレイヤー 2 の反応関数$\phi_2 : [0,1] \to [0,1]$ を

$$\phi_2(p)=\{q \in [0,1] \mid q \text{ は与えられた } p \text{ に対して } [0,1] \text{ の範囲で} v_2(\sigma) \text{ を最大にする}\}$$

と定義する。反応写像ϕ_1, ϕ_2の値は $\{r\} \in [0,1]$（1 点）かまたは区間 $[0,1]$ であることを容易に示すことができる。これらの写像を用いて，写像 Φ を，

$$\Phi: [0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]\times[0,1],\ \Phi(p,q)=(\phi_1(q),\phi_2(p))$$

によって定義する。写像 Φ は上半連続であることを容易に証明することができ，従って，角谷の不動点定理によって，不動点が存在する。今，写像 Φ の不動点を (p_*,q_*) とする。即ち，$(p_*,q_*)\in\Phi(p_*,q_*)$。定義から写像 Φ の不動点 (p_*,q_*) はゲーム g の Nash 均衡である。従って，$n=2,\ m_1=m_2=2$ の場合に定理は証明された。上の証明を一般の n,m_1,m_2の場合に拡張し，Nash の定理の証明を完成させることは容易である。（証明終わり）

さて，ここまで考えてきたゲームでは，各プレイヤーの純粋戦略の集合S_iは有限集合であった。以下では，戦略の集合が無限集合であるようなゲームを考え，その Nash 均衡の存在を証明しよう。この結果は，Part 3 で基本的な役割を果たす。

i 番目のプレイヤーの純粋戦略の集合X_iが m 次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^m$の非空，コンパクトかつ凸部分集合であるとする。このプレイヤーの利得は従って，実数値関数

$$u_i: \prod_i X_i\rightarrow\mathbb{R}^m,\ (x_1,\ldots,x_n)\mapsto u_i(x_1,\ldots,x_n)$$

によって与えられている。一般に，凸集合 X 上の関数 $u: X\rightarrow\mathbb{R}$ は，任意の $x,y\in X$ に対して$u_i(x)>u_i(y)$ ならば，$u_i(tx+(1-t)y)>u_i(y)$ が任意の $0<t<1$ に対して成り立つ時，擬凹であると言われる。

また，プレイヤー i は，各 (x_{-i}) に対して，自分の取り得る戦略の集合$\beta_i(x_{-i})$ が決まっているとする。つまり，i には制約対応

$$\beta_i: \prod_{j\neq i} X_i\rightarrow\mathbb{R}_m,\ (x_{-i})\mapsto\beta_i(x_{-i})$$

が与えられているとする。戦略の組 (x_i^*) が Nash 均衡であるとは，全ての i について，

$$x_i^*\in\beta_i(x_{-i}^*)\ \text{でかつ，任意の}x_i\in\beta_i(x_{-i}^*)\ \text{に対して}u_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geq u_i(x_i,x_{-i}^*)$$

を満たすもののことである。

Nash 均衡の存在証明の中で用いた反応関数は，それ自身重要な概念であるので，ここでその正式な定義を与えることにしよう。

定義：プレイヤー i の反応関数（対応）とは，戦略の組 (x_{-i}) に対して i の最適反応戦略を対応させる関数（対応）$\phi_i: \prod_{j\neq i}x_j\rightarrow x_i$，つまり

$$\phi_i(x_{-i})=\{z\in\beta_i(x_{-i})\mid \text{全ての}\ x\in\beta_i(x_{-i})\ \text{に対して}u_i(z,x_{-i})\geq u_i(x,x_{-i})\}$$

のことである。

定理（Nash）：ゲーム (X_i,β_i,u_i) において，全ての i についてその制約対応β_iが連続で，その値が非空，コンパクトかつ凸であり，利得関数が連続でかつ擬凹であるならば，そのゲームには Nash 均衡が存在する。

証明：各プレイヤー i の反応対応ϕ_iが上半連続で，その値が非空，コンパクト，凸集合であることを示

そう。今，点列 $\{x_i(n)\},\{y_i(n)\}$ が，$x_i(n)\to x_i, y_i(n)\to y_i$でかつ全ての n について$y_i(n)\in\phi_i(x_i(n))$ であるとする。対応β_iの上半連続性から，$y_i\in\beta_i(x_i)$ である。$y_i\in\phi_i(x_i)$ を示したい。仮にそうでなかったとすると，ある $z\in\beta_i(x_i)$ に対して$u_i(y_i)<u_i(z)$ となる。β_iの下半連続性より，点列 $\{z(n)\}$ で，$z(n)\to z$, $z(n)\in\beta_i(x_i(n))$, $n=1,2,\ldots$ となるものが存在する。するとu_iの連続性から十分大きな n に対して$u_i(y_i(n))<u_i(z(n))$ となるが，これは$y_i(n)\in\phi_i(x_i(n))$ に矛盾する。よって対応ϕ_iの上半連続性が証明された。任意の $x\in X_i$について，$\beta_i(x)$ は非空のコンパクト集合だから，連続関数u_iはその上で最大値を取る。よって$\phi_i(x)$ は非空である。$y,z\in\phi_i(x)$ を取ると，$\beta_i(x)$ の凸性から任意の $0\leq t\leq 1$ に対して $ty+(1-t)z\in\beta_i(x)$ である。またu_iの擬凹性から任意の $w\in\beta_i(x)$ に対して$u_i(w)\leq u_i(ty+(1-t)z)$ となり，$\phi_i(x)$ の凸性が示された。ここで，対応

$$\Phi:\prod_i X_i\to\prod_i X_i, \Phi(x_i,\ldots,x_n)=(\phi_1(x_{-1}),\ldots,\phi_n(x_{-n}))$$

を定義する。この対応は，ユークリッド空間の非空，コンパクト凸部分集合からそれ自身への上半連続対応で，その値は非空，コンパクトかつ凸である。従って，角谷の不動点定理によって不動点 $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ が存在する。不動点が Nash 均衡である。何故なら，不動点の定義から，各 i について，$x_i^*\in\phi_i(x_{-i}^*)$，つまりx_i^*は，全ての $x\in X_i$に対して $u(x_i^*,x_{-i}^*)\geq u(x,x_{-i}^*)$ となる。これは，x_i^*がx_{-i}^*に対する最適反応となっていることを示している。（証明終わり）

Ⅳ．一般均衡理論

以下では，極めて単純化された経済を考察する。すなわち，有限人の消費者が存在し，生産活動の存在しない経済（純粋交換経済）である。消費者達は，あらかじめ所有していた有限個の財（初期保有財）を，市場で決められた価格の下で，自己の効用が最大になるように交換取引を行うのである。

今，考えている全ての財をその特性の違いによって区別し，$j=1,\ldots,m$ によってインデックスをつける。つまり，経済には，m 種類の財が存在しているものとして，それらをひとまとめにしてm次元ベクトル $(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$によって表現する。これを財ベクトルと呼ぶ。財の特性とは，その物理的性質，消費される場所，時期などを指す。考えられる全ての財ベクトルの集合を財空間と呼ぶ。通常，財空間には，自然なベクトル空間の構造，即ち財ベクトルどうしの和とスカラー倍の演算が与えられる。今の場合，財空間はm次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^m$である[7]。それぞれの財には，市場によって価格が決められる。価格もまたベクトルの形式で $p=(p^1,\ldots,p^m)$ のように表すのが便利である。これを価格ベクトルと呼ぶ。これもまた，m 次元ユークリッド空間の要素である[8]。

また，この経済には n 人の消費者が存在すると仮定し，$i=1,\ldots,n$ のようにインデックスをつける。消費者 i は，彼に固有な消費活動の可能性を表現する消費集合X_iが与えられている。数学的には，消費集合は財空間の部分集合である。以下では，議論を簡単にするために，全ての i について，$X_i=\mathbb{R}_+^m=\{x|x\geq 0\}$ と仮定する。彼はまた，効用関数

$$u_i : \mathbb{R}^m_+ \to +\mathbb{R},\ (x^1,\ldots,x^m) \mapsto u_i(x^1,\ldots,x^m)$$

及び初期保有財ベクトル$\omega_i=(\omega_i^1,\ldots,\omega_i^m)\in\mathbb{R}^m$を与えられている。効用関数と初期保有財ベクトルの組 $(u_1,\ldots,u_n,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ を（純粋交換）経済という。

定義：純粋交換経済 $(u_1,\ldots,u_n,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ において，以下の条件を満足する消費ベクトルと価格ベクトルの組 $(p^*,x_1^*,\ldots,x_m^*)$ を競争均衡という。

(E-1)　全ての i に対して以下のことが成り立つ。即ち，

$p^*x_i^*\leq p^*\omega_i$であり，$p^*x\leq p^*\omega_i$であるような任意の x に対して$u_i(x_i^*)\geq u_i(x)$ となる。

(E-2)　$\sum_i x_i^*\leq\sum_i\omega_i$

条件(E-1)は，x_i^*が予算制約を満たしていて，また，同様の全ての消費計画の中で効用を最大にしていること，また，条件(E-2)は，需要が供給を上回らないことをいっている。

定理（Arrow-Debreu）：純粋交換経済 $\varepsilon=(u_1\ldots u_n,\omega_1\ldots\omega_n)$ が以下の仮定を満足するならば，競争均衡（$p^*,x_1^*\ldots x_n^*$）が存在する。全ての i について，

(CT)：効用関数$u_i(x)$ は連続である。

(M)：効用関数$u_i(x)$ は単調である，つまり，$x\leq z$ かつ $x\neq z$ ならば，$u_i(x)<u_i(z)$ である。

(CV)：任意の $x,y\in\mathbb{R}^m_+$に対して，$u_i(x)>u_i(y)$ ならば$u_i(tx+(1-t)y)>u_i(y)$ が任意 $0<t<1$ に対して成り立つ。

(E)：$\omega_i\gg 0$

証明：今，$M>\|\sum_i\omega_i\|$ であるような実数 M を取り，$K=\mathbb{R}^m\cap B(0,M)$ とおく。その K によって$\hat{X}_i=\mathbb{R}^m_+\cap K$として，関数$u_i$を$\hat{X}_i$に制限したものを，$\hat{u}_i$とかき，経済 ε の部分経済 $\hat{\varepsilon}=(\hat{u}_i,\omega_i)$ を考える。定理の証明は，先ず部分経済 $\hat{\varepsilon}$ に競争均衡が存在することを証明し，次に，部分経済 $\hat{\varepsilon}$ の競争均衡は，元の経済 ε のそれでもあることを示すことによって，遂行される。価格単体Δを，$\Delta=\{p\in\mathbb{R}^m_+|\sum_{k=1}^m p^k=1\}$ によって定義し，部分経済 $\hat{\varepsilon}$ における消費者 i の予算対応を

$$B_i : \Delta\to\hat{X}_i,\ B_i(p)=\{x\in\hat{X}_i|px\leq p\omega_i\}$$

によって定義する。

補助定理：予算対応は連続で，その値は非空，コンパクト凸集合である。

証明：$B_i(p)$ は，任意の p に対してコンパクト集合$\hat{X}_i$の閉部分集合だからコンパクトであり，$\omega_i\in\beta_i(p)$ だから，非空である。今，$x,y\in\beta_i(p)$ とすると，任意の $0\leq t\leq 1$ に対して $p(tx+(1-t)y)\leq p\omega_i$だから，$\beta_i(p)$ は凸集合である。上半連続性を示すために，$p_n\to p, x_n\to x, x_n\in\beta_i(p_n), n=1,2,\ldots$ と仮定する。全ての n について$p_n x_n\leq p_n\omega_i$だから，極限でも$p_x\leq p\omega_i$である。よってβ_iは上半連続である。今，$p_n\to p$, $z\in\beta_i(p)$ と仮定する。$pz<p\omega_i$ならば，充分大なる N に対して $n\geq N$ ならば，$p_n z<p_n\omega_i$となるから，$z_n=z(n\geq N)$ とする。$1\leq n\leq N$ に対しては$\beta_i(p_n)$ から適当にz_nを取り出して，$z_n\to$, $z_n\in\beta_i(p_n)$ となる点列 $\{z_n\}$ を構成することができる。$pz=p\omega_i$の時は，仮定 (E) によって $p\omega_i>0$ だから，十分大きな n に対して，$p_n z>0$ となる。そこで$t_n=p_n\omega_i/p_n z$ とすると，十分大きなすべての n に対して$t_n>0$ かつt_n

$\to 1$ となる。そこで$z_n = t_n z$ とおけば，$p_n z_n = p_n \omega_i$だから，明らかに全ての n に対して$z_n \in \beta_i(p_n)$ でかつ$z_n \to z$ となる。（証明終わり）

部分経済 $\bar{\varepsilon}$ から，以下のように $n+1$ 人ゲーム g を構築しよう。プレイヤー $i=1,\ldots,n$ は，戦略集合 X_i，利得関数$v_i(x_1,\ldots,x_n,p) = u_i(x_i)$，制約対応$\beta_i(x_1,\ldots,x_n,p) = \beta_i(p)$ を持ち，プレイヤー $n+1$（マーケットプレイヤー）は，戦略集合 Δ，利得関数$v_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,p) = p\sum_{i=1}^{n}(x_i - \omega_i)$，制約対応$\beta_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,p) = \Delta$ を持つ。このゲーム g は，Part Ⅲの定理の条件を満たし，従って，同定理により Nash 均衡 $(x_i^n,\ldots,x_n^*,p^*)$ が存在する。これが経済 ε の競争均衡であることを示そう。

プレイヤー $i=1\ldots n$ について

$$p^* x_i^* \leq p^* \omega_i \text{であり，} p^* x \leq p^* \omega_i \text{であるような任意の } x \in \bar{X}_i \text{に対して} u_i(x_i^*) \geq u_i(x)$$

となる。今仮に，$p^* x \leq p^* \omega_i$であるような $x \in X_i = \mathbb{R}^m$に対して$u_i(x_i^*) < u_i(x)$ となったとすると，十分 1 に近い t に対して $tx^* + (1-t)x \in K_i$でかつ，明らかに$p^*(tx^* + (1-t)x) \leq p^* \omega_i$でありまた$u_i$の擬凹性の仮定（CV）から，$u_i(tx^* + (1-t)x) > u_i(x^*)$ となり上の条件に矛盾する。従って均衡の定義の条件（E-1）が証明された。次にプレイヤー $n+1$ については，

$$\text{全ての } p \in \Delta \text{ に対して } p\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - \omega_i) \leq p^* \sum_{i=1}^{n}(x_i^* - \omega_i)$$

が成り立ち，既に示したところにより$p^* x_i^* - p^* \omega_i \leq 0,\ i=1\ldots n$ だから，$p^* \sum_{i=1}^{n}(x_i^{*j} - \omega_i) \leq 0$ である。よって $p = (1,0\ldots0),(0,1\ldots0),\ldots$ としていくことによって，$\sum_{i=1}^{n} x_i^{*j} \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i^j,\ j=1\ldots m$ が示され，定義の条件（E-2）が証明された。（証明終わり）

注

1　現代数学では，集合概念をさらに抽象化した圏の概念が本質的に用いられている。この思想は，いわゆる代数的トポロジーから発生したものであって，トポロジーの手法と理論経済学の本質的親近性（以下を参照）を考えあわせると，将来的には，再び経済学に思想的及び技術的影響を及ぼすことが予想される。しかし，現時点では，圏論が経済学に明示的に用いられた例は知られていない。

2　集合 X から Y への写像とは，X の各要素 x に Y のある定まった要素を対応させる「規則」のことである。以下を参照。

3　$\mathbb{R}^n$の要素はベクトルとも点とも呼ばれる。

4　n_kは，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 $k \to n_k$（の値）と考えれば良く，その様子は例えば，$n_1=2, n_2=5, n_3=9,\ldots$ などのようになっている。

5　このことは直感的に認めてもらいたい。厳密には，これは，「実数の連続性公理」と呼ばれる実数論の公理の一つの表現なのである。詳細については，二階堂（1960）を参照。

6　$s_i^{k_i}, 1 \leq k_i \leq m_i$などとするべきところだが，表記が煩雑になるので，時々，k_jを省く。

7　現代的な理論においては，しばしば，ある種の関数空間のような無限次元のベクトル空間が考察の対象となる。

8　財空間が無限次元空間の場合，価格空間はその双対空間（財空間上の連続線形汎関数の集合）に取るのが自然である。

参考文献

Arrow, K. J. and G. Debreu (1954) “Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy,” *Econometrica* 2: 265–290.

Debreu, G. (1959) *Theory of Value*, John Weily.

Nash, J. F. (1950) “Equilibrium Points in N-person Games,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A* 36: 48–49.

Nash, J. F. (1951) “Non-Coopertive Games,” *Annals of Mathematics* 54: 286–295.

二階堂副包（1960）『現代経済学の数学的方法』岩波書店。

岡田章（1996）『ゲーム理論』有斐閣。

武隈慎一（2001）『数理経済学』新世社。

（2007 年 5 月 10 日　受理）