『経済研究』（明治学院大学）第 144 号　2011 年

# スケールフリーネットワーク評価のための基準量の提案

浜　口　幸　弘

## 1. 本稿の概要

ここ最近，スケールフリーネットワーク（scale-free networks）がさまざまな分野で研究されるようになってきた。しかし，スケールフリーネットワークの定義はあいまいで，各分野によってもさまざまである。こうした状況において多くの研究で共通している数少ない特徴の１つは，ノードのリンク数とその順序の関係がべき法則（Power Law）に従うことである。べき法則関係（または，スケーリング（Scaling）関係）とは，$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ を満たす有限列（$y_1$，$y_2$，…，$y_n$）に対して，

$$k = cy_k^{-\alpha}$$

$k$：size rank（大きさの順位）

$c$：定数

$\alpha$：テールランク

が成り立つことを意味する。ここで，左辺に $y_k$ が生じる頻度（size frequency）を用いる場合もあるが，本稿では，詳細な模擬実験を行い適切な理由を与えている Li et al.（2005）に従い，大きさの順位を用いることにする。そして，この性質をもつネットワークを SF ネットワークと記すことにする。

さて，前述の Li et al.（2005）は，スケーリング関係にある頂点次数の有限列，すなわち SF ネットワークは高い多様性（平均的ネットワークからの乖離が極めて大きくなる）をもつことを実際に模擬実験で示し，ネットワークを識別するための新たな基準量 *s*- 値を提案した。確かに *s*- 値はグラフ（木）のノード間の接続状態を表現するのに有効であるが，最大の *s*- 値を与えるグラフ（木）でもなお多様性をもつことが示される。また，提案したアルゴリズムおよび各命題には反例を挙げることができる。本稿ではこれらの問題点を指摘したうえで修正し，SF ネットワークを評価するためには複数の基準量を用いることが有効であることを示す。ここで提案する基準量は SF ネットワークに限らず，より一般的な単純無向連結グラフにも適用可能である。よって 3 章以降では，単純無向連結グラフ（特に木が中心となる）を想定して議論する。

なお，本稿では必ずしも厳密に使い分ける訳ではないが，一般的なネットワークを考えるときは，「ノード（node）」と「リンク（link）」を用い，グラフ理論上でそれらを扱うときはそれぞれ「頂

点（vertex）」と「辺（edge）」と記すことにする。

## 2. SF ネットワークの背景

ここでは，頂点数 $n$ のグラフの次数列 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ に対して，$k = cd_k^{-\alpha}$（$1 \leq k \leq n_s \leq n : n_s$ はスケーリングの範囲を決定）が成り立つとき，スケーリング次数列と呼ぶ。そして，この次数列をもつグラフはスケーリング次数分布すると呼ぶ。Li et al.（2005）は，各文献に見られる SF ネットワークの主な特徴として，以下の 6 点を指摘している。

(1) SF ネットワークは，スケーリング次数分布する。
(2) SF ネットワークは，ランダムプロセスによって生成される。
(3) SF ネットワークは，高次数のハブがそのネットワークにおいて特徴的役割を果たす。
(4) SF ネットワークは，ランダムな次数維持のためのリンク換えが行われる。
(5) SF ネットワークは，自己類似的（self-similar）である。
(6) SF ネットワークは，ドメイン特有の細部に依存しない。

ところが，各文献では，上記特徴の互いの関係が不明瞭であり，また SF ネットワークが満たすべき特徴が不明瞭である。すなわち，Li et al.（2005）によれば，特徴の(1)と(2)が多くの文献において SF ネットワークを定義する共通条件となっているが，SF ネットワークにおける数学的形式化の曖昧さおよび本質的性質に対する曖昧さのため，ネットワークにとって “scale-free” であることの意味が混乱して使われており，SF ネットワークとして特徴(1)のみを満たせば，他の特徴も導かれるという議論の誤りを指摘している。

Li et al.（2005）の論文で特筆すべきは詳細な模擬実験の実施であるが，その 1 例を挙げると以下のようになる。次数列，ノード数およびリンク数のすべてが同一のスケーリングネットワークとして，HSFnet（Hierarchical Scale-Free Network：上記特徴のすべてをもち，SF ネットワークの標準であり，最高次数のノードがネットワークの中心にある）と HOTnet（Heuristically Optimal Topology Network：特徴(1)のみをもち，ネットワークの縁に次数の高いノードがあり，現実のインターネットに近い）を人工的に作り，模擬実験でその性能を比較している。その結果，上記 2 つのネットワークは，ネットワークの 1 つのパフォーマンスを測定する基準（最大スループット）において，大きく異なることを導き，スケーリング次数分布するグラフ（特徴(1)のみを満たすグラフ）は，上記の他の特徴を併せ持つグラフと同値ではないことを示している。すなわち，標準的 SF ネットワークは，現実のインターネットとはかなり異なる特徴をもつ。また、インターネットがもつ最も基本的な特徴さえもたないと言える。

## 3. Li の理論とその問題点

ここでは，Li et al.（2005）の提案する理論を概観し，その上でその問題点を指摘する。

Li et al.（2005）は，2 章で述べた問題点を解決するために，同一のスケーリング次数列，ノード数およびリンク数を持ったネットワーク同士を特徴づけるための定量的な基準量を提案した。そこで，その基準量 s-metric を示すために，以下のように記号を定義する（使用する記号は出来る限り Li et al.（2005）に従うことにする）。

$g$ を単純無向連結グラフとし，その頂点集合を $V$（頂点数 $n = |V|$），その辺集合を $E$ とする。また，

任意の頂点 $i$ に対して，その次数を $d_i$ で表し，$g$ の次数列を $D=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$（$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ とする），頂点 $i$, $j$ に対して，$(i, j)$ を辺とする。そして $G(D)$ を同じ次数列 $D$ をもつ単純無向連結グラフの集合とする。このとき，Li et al.（2005）は次のような基準量 $s(g)$（$g$ の $s$-値ともいう）を与えている。

$G(D)$ に属す任意のグラフ $g$ に対して，$s(g)$ を $\sum_{(i,j)\in E} d_i d_j$ として定義する。

基準量 $s(g)$ は，グラフ $g$ がハブのようなコアをもつ程度を表し，高次数のノード同士が接続するほど大きくなる（Li et al.（2005））。また，この基準が適用できるグラフは，スケーリング次数グラフに限らず一般的グラフにも適用できるので，断わりのない限り単純無向連結グラフを対象として議論する（理論の提案においては，さらに限定して木を対象とする）。

Li et al.（2005）は $s(g)$ の有効性を，人工的に作成した5つの代表的SFネットワーク（前述のHSFnetおよびHOTnetを含む）を用いて次のように示している。ただし、これらのネットワークは，次数列，ノード数およびリンク数のすべてが同一であるとする。

$G(D)$ における最大の $s(g)$ を $s_{max}$ として，グラフのパフォーマンス $perf(g)$ と $s(g)/s_{max}$ の関係を見ると，5つのSFネットワークは平面上で大きく異なる分布を呈している。多くの文献は，スケーリング次数のみで他のスケーリンググラフの特徴をも包含すると主張しているが，この関係はそれを否定するものである。また，この関係は，$s(g)$ がスケーリング次数分布するグラフを識別するうえで，有効な基準量となることを示している。すなわち，高次数のノード同士の接続の程度を測定する基準 $s(g)$ から，SFグラフの特徴をかなり明らかにできると考えられる。この点において，最大の $s(g)$ をもつ基準となるグラフの特徴を導くことは重要である。

さて本稿の目的の1つは，Li et al.（2005）の提案した命題の改善と拡張にあるので，以降の議論においては，対象とする単純無向連結グラフ $g$ を木とする。そして，グラフの頂点次数列 $D=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ に対して，$\sum_i d_i = 2(n-1)$ が成り立つことを前提条件とする。このとき，次数列を満たす木が存在することが保証される。ここで，Li et al.（2005）の提案したアルゴリズムおよび命題（主たる結果は，命題4.2と命題4.4）の問題点を指摘すると以下のようになる。

与えられた次数列 $D$ に対して，$s(g)$ が最大になるようなグラフ（木）を $T_{max}$ とする。このとき，

(1) アルゴリズムによって生成される木が，$T_{max}$ になることが適切に示されていない。

その証明では，局所的な最適性を示しているに過ぎない。なお，類似問題として最小全域木問題（Minimum Spanning Tree Problem）があり，Kruskalのアルゴリズムや Primのアルゴリズムが知られている（Korte and Vygen（2005））が，これらは頂点次数の大きさという制約条件がないので，その証明方法は利用できない。

(2) アルゴリズムによる生成木は，命題4.2の（b），（c），（d）を満たすとは限らない。

図2（後述）にその反例を示す。なお，Li et al.（2005）の命題4.2の（a），（b），（c），（d）に関しては，本稿の命題3を参照されたい（$T^*_{max}$ を $T_{max}$ にすればよい）。

(3) アルゴリズムによる生成木が命題4.2を満たしても，命題4.4を満たすとは限らない。

図4（後述）にその反例を示す。なお，Li et al.（2005）の命題4.4に関しては，本稿の命題7を参照されたい（$T^*_{max}$ を $T_{max}$ にすれ

ばよい）。

(4) $T_{max}$ の多様性を考慮していない。

後述するように $T_{max}$ には多様性がある。

そこで本稿では，次章以降これらの問題を検討および修正していく。

## 4. 理論の改善

まず平面上における木 $T$ の描画として，木の最大次数の頂点の 1 つを根 $r$ として最上レベル 0（$l_0$ と記す）に置き，$r$ から下方に向けて距離が 1 にある頂点の位置をレベル 1（$l_1$），距離が 2 にある頂点の位置をレベル 2（$l_2$），…とする。そして，各 $l_i$ における頂点の集合を $L_i$ とする。また，頂点 $u$ から下方に向けて頂点 $v$ に至る道が存在するとき，$u$ は $v$ の上流にある，または $v$ は $u$ の下流にあるという。$T$ 上の任意の頂点 $v$ に対して，$v$ およびそれより下流にあるすべての頂点からなる部分木を $\tilde{T}_v$ と記す。

さらに議論をしやすくするために，本稿では新たに次のような定義を追加する。

定義 1（平面上における木の頂点の位置づけ）

平面上の木 $T$ に対して，その $l_1$ において頂点を左端から右端に次数の大きいものから並べる。同様に，任意の頂点 $v$ の下流の隣接点は，次数の大きい順に左から並べる。また，任意の頂点 $u$ と $v$ が同じレベルで左からこの順に並ぶとき，それぞれの下流の任意の隣接点 $\alpha$ と $\beta$ は，$\alpha$ が $\beta$ より左になるようにする（このような位置づけによって得られる木は元の木と同型である）。

また頂点の位置を数字で表すために，根 $r$ を 1 とし，次に $l_1$ の左端から 2，3，…として，以降各レベルにおいて左端から右端に進みながら番号を順次与え，すぐ下のレベルに進んで同様に番号をつけていく。

定義 2（部分木間の交換）

木 $T$ 上の任意の頂点 $u$ と $v$ に対して，部分木 $\tilde{T}_u$ と $\tilde{T}_v$ が共有点をもたないとき，$\tilde{T}_u$ と $\tilde{T}_v$ は交換できる（すなわち，頂点 $u$ と $v$ の各上流の隣接点は固定して $\tilde{T}_u$ と $\tilde{T}_v$ を交換する。変換後において，各頂点の次数の大きさは変わらない）。これを部分木間の交換と呼ぶ。

定義 3（次数が満たされていない頂点）

頂点の次数が $d$ であるが，アルゴリズムの過程において，接続された辺の本数が $d$ 未満の頂点を次数が満たされていない（辺を接続する余裕をもつ）頂点と呼ぶ。

まず，次数列 $D$ に対応する $T_{max}$ に関する基本的性質を示す。これは，Li et al.（2005）が指摘していない特徴であるが，それ以降の命題に関わってくる基本命題である。

命題 1

木 $T_{max}$ 上の根から葉（木の端点）にいたる任意の道に対して，根を始点として順に並ぶ頂点の次数の大きさは非増加列をなす。

証明

主張の結論を否定して背理法で示す。

根から葉にいたるある道 $P$ は $m$ 個の頂点をもつとする。そして、これらの頂点の次数を大きい方から並べたとき，$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$ とする（ここでは，$d$ の添え字は頂点ではなく，大きさの順位を表す）。ここで，$d_1$ は根の次数であり，その頂点は $P$ の始点となり，$d_m$ は葉の次数（すなわち 1）であり，その頂点は $P$ の終点となる。このとき，ある $i(\geq 1)$ に対して，以下のような $j$ が存在すると仮定する。

根を始点とする $P$ 上の頂点の次数列は左から順に，$d_1$ から $d_i$ までは添え字が 1 ずつ増加し，そのすぐ後の次数 $d_j$ において，$j > i + 1$ とする。ただし，次数例において次数が同じ大きさなら添

え字の小さい次数をより左に置くようにする（一般性は失われない）。

このとき，$d_j < d_{i+1}$ が成り立つ。また，$d_{i+1}$ の直前にある頂点次数を $d_k$ とすれば，$k > i + 1$ であり，$d_k < d_{i+1}$ となる（前述の次数の位置の条件より等しくはなり得ない）。すなわち，$P$ の頂点の次数列は（$d_1$，…，$d_i$，$d_j$，…，$d_k$，$d_{i+1}$，…，$d_m$）であり，隣接する項同士の積の総和を $s(P)$ とすると，次のようになる。

$$s(P) = d_1\ d_2 + \cdots + d_{i-1}d_i + d_i\ d_j + \cdots + d_k\ d_{i+1} + \cdots + d_l\ d_m$$

ただし，$P$ の任意の辺に対して，始点側の頂点次数を $d_u$ とし，終点側の頂点次数を $d_v$ とすると，$d_u d_v$ の順に積をとる。

ここで，各次数を単なる数とみなし，次のように考える。

$s(P)$ の和をなす各項の左側にある項から数列 $L$ を，右側にある項から数列 $R_0$ を次のように構成する。

$L = (d_1,\ \cdots,\ d_{i-1},\ d_i,\ \cdots,\ d_k,\ \cdots,\ d_{m-1})$ においては，添え字が 1 ずつ増加するように並べ，$R_0 = (d_2,\ \cdots,\ d_i,\ d_j,\ \cdots,\ d_{i+1},\ \cdots,\ d_s)$ においては，$L$ における同じ順番の項との積が $s(P)$ にあるようにする。すなわち，$L$ と $R_0$ の同じ順番にある各項同士の積の和をとれば，$s(P)$ になる。そこで，$S_0 = s(P)$ とし，$R_0$ において，$d_j$ と $d_{i+1}$ を交換して得られる数列を $R_1$ として，$L$ と $R_1$ の同じ順番にある各項同士の積の総和を $S_1$ とすれば，$S_1 - S_0$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= d_i d_{i+1} + d_k d_j - (d_i d_j + d_k d_{i+1}) \\ &= (d_i - d_k)(d_{i+1} - d_j) > 0 \end{aligned}$$

これは，$d_{i+1} > d_j$ であり，$d_i \geq d_{i+1} > d_k$ が成り立つことによる。

そして $R_1$ に対して，大きさが同じ項があれば添え字の小さい方をより左に置くようにする。このとき，$R_1$ において，$d_{i+1}$ のすぐ後の項 $d_t$ の添え字が $t > i + 2$ となるならば，上と同様の手続きを行い，$L$ と $R_2$ から得られる総和を $S_2$ とすれば，$S_2 \geq S_1$ となる（$R_1$ 内の $d_{i+2}$ と積をなす $L$ 内の項を $d_k$ とすると，$d_{i+1} \geq d_k$ で等号を含むが，展開に影響はない）。よって，$S_2 > S_0$ である。こうした一連の手続きを繰り返すと，$R_0$ から $R' =$（$d_2$，…，$d_i$，$d_{i+1}$，…，$d_m$）を得る（添え字が 1 ずつ増加）。$L$ と $R'$ の同じ順番にある各項同士の積の総和を $S'$ とすれば $S' > S_0$ である。

上述のことから，$T_{max}$ を元にしてより $s$- 値の大きい木を構成できる。以下，それを示す。

$L$ と $R'$ に対応する道を $P'$ とすると，その頂点の次数列は $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$ である。また，$P$ と $P$ 上の任意の頂点 $v$（両端点以外）のみを共有する $T_{max}$ の最大頂点数の部分木を $T_v$ と記す。このとき，$P$ 上の頂点 $u$ と $v$ に対して，$T_u$ と $T_v$ を交換しても，その $s$- 値である $s(T_u)$ と $s(T_v)$ は変わらない（ただし，$u$ と $v$ の次数は $T_{max}$ 上での次数として $s$- 値を算出）。よって，この操作を繰り返して $P$ を $P'$ に変換し，$P'$ を含む木を $T'$ とすると，$s(T') - s(T_{max}) = S' - S_0 > 0$ となり，$T_{max}$ より $s$- 値の大きい木 $T'$ が得られ，矛盾する。□

この逆は成り立たない。図 1 にその反例を示す。

さて，$T_{max}$ は Li et al.（2005）の命題 4.2 の（a）を満たすが，（b），（c），（d）を満たすとは限らない。すなわち図 2 のように反例を示すことができる。この例では，$d_r = 7$，$d_u = 6$，$d_v = 5$ に対して，$\tilde{T}_u$ と $\tilde{T}_v$ において命題をみたさない。

そこで，（b），（c），（d）を満たす $T_{max}$ を構成するために，次のような命題を用意する。ここでは定義 1 と定義 2 を適用している。

命題 2

任意の $T_{max}$ に対して，$T_1 = T_{max}$ とする。こ

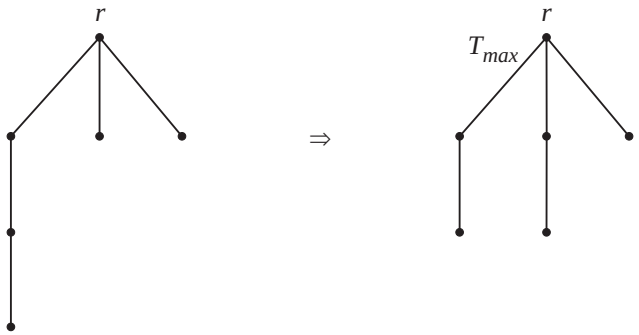


**図 1　命題 1 の逆が成り立たない例**

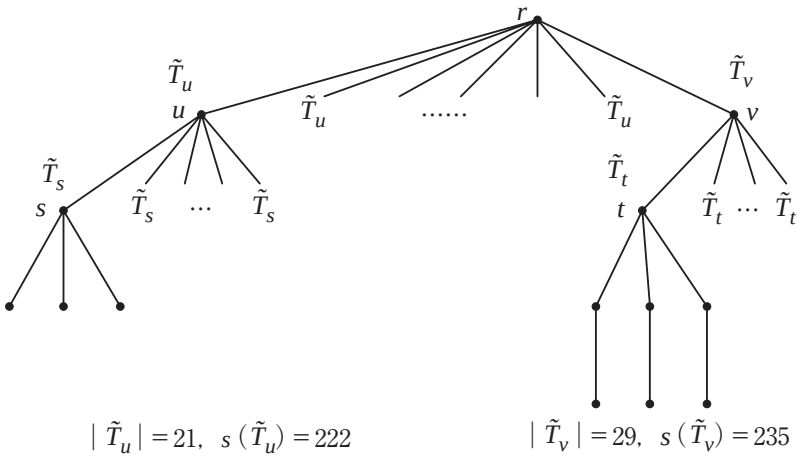


**図 2　Li の生成木が命題 4.2 を満たさない例**

のとき，任意の $k$ に対して，頂点の位置づけに従う $T_{k-1}$ から，部分木の交換を通して $s$- 値を変えずに，次のような頂点の位置づけに従う $T_k$ を構成できる。

$T_k$ において，1 から $i$ 番目の頂点までの集合を $V_i$ とする（$1 \leq i \leq k$）。このとき，

$$\forall u \in V_i .\ \forall v \in V \setminus V_i .\ d_u \geq d_v$$

である。

証明

$k=1$ のとき，明らかに主張は成り立つ。

$k-1$ に対して主張が成り立つと仮定する。すなわち，$T_{k-1}$ は最大の $s$- 値をもち，$\forall u \in V_i .\ \forall v \in V \setminus V_i .\ d_u \geq d_v$（$1 \leq i \leq k-1$）である。また，$T_{k-1}$ は頂点の位置づけに従う。そこで，$T_{k-1}$ の $k$ 番目の頂点を $\alpha$（$\in V \setminus V_{k-1}$）とし，そのレベルを $j$(すなわち，$l_j$）とする。

任意の $\beta \in V \setminus V_{k-1}$ に対して，$d_\alpha \geq d_\beta$ ならば，$V_k = V_{k-1} \cup \{\alpha\}$ とし，$\alpha$ を $T_k$ における $k$ 番目の頂点とする。

そうでないときは，$\beta \in V \setminus V_{k-1}$ かつ $d_\alpha < d_\beta$ であるような頂点のうちで，最大次数の頂点を $\beta$ とする。$\alpha$ の上流の隣接点を $u$，$\beta$ のそれを $v$ とすると，$u \in V_{k-1}$ かつ $u \in L_{j-1}$ である。また，明らかに $\beta$ は $\alpha$ の上流にはなく，かつ命題 1 から

下流にもない。このとき，$d_u = d_v$ となる（$u \neq v$）。その理由は以下による。

$d_u > d_v$ ならば，$T_{k-1}$ が最大の $s$- 値をもつことに反する。というのは，部分木 $\tilde{T}_\alpha$ と $\tilde{T}_\beta$ は共有点をもたないので部分木の交換ができ，それによって得られる木は，$T_{k-1}$ より大きな $s$- 値をもつからである。つまり，$s$-値の変化分が

$d_u d_\beta + d_v d_\alpha - (d_u d_\alpha + d_v d_\beta)$
$= (d_u - d_v)(d_\beta - d_\alpha) > 0$ となることによる。

$d_u < d_v$ ならば，$v \in V_{k-1}$ であり（$v \in V \setminus V_{k-1}$ ならば，$u \in V_{k-1}$ だから帰納法の仮定に矛盾），$v \in L_{j-1}$ となる。また，レベル $j-1$ において，$v$ は $u$ より左にある。一方，$\beta$ はレベル $j$ にあり（$v \in L_{j-1}$ だから），$\alpha$ より右にあるので，$T_{k-1}$ の頂点の位置づけに反する。

そこで，$\tilde{T}_\alpha$ と $\tilde{T}_\beta$ を交換して頂点の位置づけを行い，$V_k = V_{k-1} \cup \{\beta\}$ とし，$\beta$ を $T_k$ における $k$ 番目の頂点とする。

以上いずれの場合も，$\forall u \in V_i$. $\forall v \in V \setminus V_i$. $d_u \geq d_v$（$1 \leq i \leq k$）であり，$T_k$ の $s$- 値は $T_{k-1}$ と同じである。よって $k$ に対して主張が成り立つ。□

上記の変換を繰り返して最終的に構成される木を $T^*_{max}$ と記す。命題 2 から導かれることは，$T^*_{max}$ は各レベルにおいて，左端の頂点から右に進むにつれて次数が小さくなり，レベル $i-1$ の頂点の最小次数は，レベル $i$ の頂点の最大次数以上となることである。また，与えられた次数列に対応する木が存在すれば，その木の個数は有限なので $T_{max}$ が存在し，常に $T^*_{max}$ は存在する。そこで，Li et al.（2005）の提案した主たる命題の 1 つを以下のように修正できる。

命題 3

与えられた次数列に対応する $T^*_{max}$ があるとする。このとき，$d_u > d_v$ であるような任意の頂点 $u$ と $v$ に対して，以下が成り立つ。

(a) $v$ は $u$ の上流にくることはない。

(b) $\tilde{T}_v$ の頂点の個数は $\tilde{T}_u$ の頂点の個数以下である。

(c) $\tilde{T}_u$ の頂点の次数列を大きい方から順に並べると，$\tilde{T}_v$ の頂点を同様に並べたときに比べて，$\tilde{T}_u$ の各頂点の次数の大きさは対応する頂点のそれ以上である。

(d) $s(\tilde{T}_u) > s(\tilde{T}_v)$

証明

(a)　命題 1 より明らか。

(b), (c), (d) $T^*_{max}$ は頂点の位置づけに従うとする。$v$ が $u$ の下流にあるときは明らかに (b)，(c)，(d) が成り立つ。$v$ が $u$ の下流にないとき，すなわち，$u$ は $v$ より上のレベル，または $u$ と $v$ は同レベルで $u$ は $v$ より左にある場合を考えればよい（$\tilde{T}_u$ と $\tilde{T}_v$ は頂点を共有しない）。$u$ と $v$ の各レベルより $i$（$\geq 0$）だけ下流のレベルをそれぞれ $l_u(i)$，$l_v(i)$ とする。そこで，$l_v(i)$ にある各頂点を $l_u(i)$ にあるその次数以上の頂点に，左端から順に 1 対 1 で対応づけられることを示せばよい（$l_u(i)$ にある頂点は余ってもかまわない）。そのために，$l_v(i)$ および $l_u(i)$ にあるすべての頂点を上流の隣接点を共有する組に分けて，$l_v(i)$ にある左の組から順に対応づけすることを考える。$i=0$ のとき，$u$ と $v$ の位置より明らかに主張は成り立つ。$i-1$ のとき，$l_v(i-1)$ にある左から $j$ 番目の組の各頂点が，$l_u(i-1)$ にある左から $j$ 番目の組のその次数以上の頂点に左端から順に 1 対 1 で対応づけられると仮定する（$j$ は任意）。いま，$l_v(i-1)$ の頂点 $t$ が $l_u(i-1)$ の頂点 $s$ に対応するとする。このとき，$d_t \leq d_s$ および各レベルにある頂点の位置関係から，$t$ の下流の各隣接点を $s$ の下流のその次数以上の隣接点に，左端から順に 1 対 1 で対応づけられる。よって，$i$ の

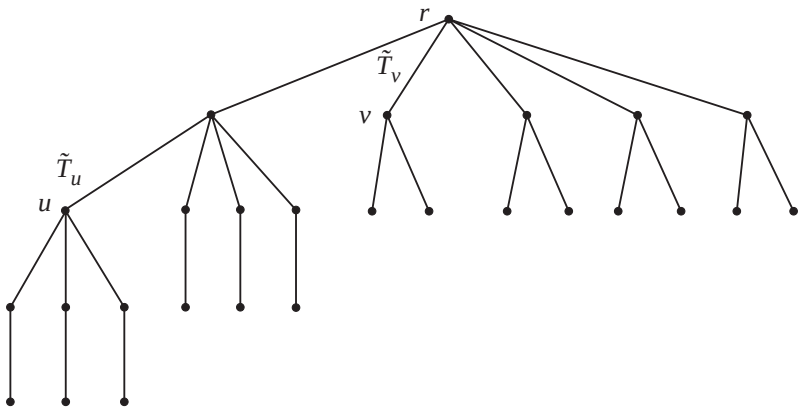


**図 3　命題 3 (b), (c), (d)を満たす $T_{max}$ ($\neq T^*_{max}$) の例**

場合も主張は成り立つ。このことから，(b)，(c)，(d) が成り立つ。□

しかし，図 3 に示すように，命題 3 の (b)，(c)，(d) を満たす $T_{max}$ は $T^*_{max}$ に限定されない。よって，(b)，(c)，(d) を満たす $T_{max}$ を $T'_{max}$ と記すことにする。

さて，Li et al. (2005) の提案する $T_{max}$ 生成のためのアルゴリズムは，すべての $T_{max}$ を生成するとは限らない。しかし，このように $T_{max}$ は多様性をもつので，すべての $T_{max}$ を生成するようなアルゴリズムが要求されよう。その修正アルゴリズムを次のように提案する。

［修正アルゴリズム］

その段階において生成されたすべての木からなる集合を $A$(最初の段階では，$A = \{r\}$) とし，すべての頂点の集合 $V$ から $A$ に含まれるすべての頂点を除いた集合を $B$ とする。そして，$A$ の任意の木 $T$ に対して，次数が満たされていないすべての最大次数の頂点を $u_1$，…，$u_i$ とする。このとき，$B$ の最大次数の頂点の 1 つを $v$ とし，$T$ にそれぞれの辺 ($u_1$，$v$)，…，($u_i$，$v$) を接続した木（1 つの $T$ に対して，$i$ 本の生成木）を $T$ と入れ替えて $A$ に加える。また，$B$ から $v$ を除いた集合を新たに $B$ とする。そして，$B$ が空になるまで同様の手順を繰り返す。（この手続きで，$D$ に従う木が生成されることは 3 章の前提条件より明らか。）

Li et al. (2005) の提案したアルゴリズムとの違いは，「1 個の最大次数の頂点」ではなく，「すべての最大次数の頂点 $u_1$，…，$u_i$」をとることにある。次に，以下の簡単な命題を導いて，この修正アルゴリズムの適切さを示す。

命題 4

修正アルゴリズムの任意の段階において，生成される任意の 2 つの木を $T$ と $T'$ とする。それぞれの木において，次数が満たされていない頂点の次数を大きさの順に並べて，$d_1 > d_2 > \cdots > d_l$ および $d'_1 > d'_2 > \cdots > d'_m$ とし，各空き次数分の総和を $\Delta_1$，$\Delta_2$，…，$\Delta_l$ および $\Delta'_1$，$\Delta'_2$，…，$\Delta'_m$ とする。このとき，$V(T) = V(T')$ である。また，$l = m$ であり，任意の $i$ ($1 \leq i \leq l$) に対して，$d_i = d'_i$ および $\Delta_i = \Delta'_i$ である。

証明

修正アルゴリズムの第 1 段階では明らかに主張は成り立つ。修正アルゴリズムの第 $k-1$ 段階において，$T$ と $T'$ に対して主張が成り立つと仮定する。第 $k$ 段階における修正アルゴリズムの手続きにより，$T$ の頂点 $\alpha$ が選択され，$T'$ の頂点 $\beta$

が選択され，$v \in B$ が選択されるとすると，$d_\alpha = d_\beta = d_1$ であり，$T$ と $T'$ にそれぞれ辺 $(\alpha, v)$ と $(\beta, v)$ が追加される。よって，第 $k$ 段階においても主張が成り立つ。□

そこで以下の命題を提案する。頂点の番号は定義1による。

命題5

修正アルゴリズムは $T_{max}$ のみを生成し，任意の $T_{max}$ は修正アルゴリズムによって生成される。

証明

まず，$T^*_{max}$ は修正アルゴリズムによって生成されることを示す。$T^*_{max}$ は最大次数の頂点の1つを根にするので，これは修正アルゴリズムの最初の結果と一致する。そこで，頂点の位置づけに従う $T^*_{max}$ において，$k-1$ 番目の頂点まで修正アルゴリズムによる頂点選択と辺接続の結果の1つと一致すると仮定する。この木の $k$ 番目の頂点 $\alpha$（レベル $i$）に対して，その上流の隣接点を $u$（レベル $i-1$）とする。このとき，$\forall v \in V \setminus V_{k-1}$. $d_\alpha \geq d_v$ である。$u$ と同じレベルでその左側にある頂点のうち，$V_{k-1}$ に属す頂点との接続で次数が満たされていない頂点があれば，$\alpha$ と同じレベルの右側の頂点が接続していることになり，頂点の位置づけの方法に反する。よって，$u$ は $V_{k-1}$ において $\alpha$ が接続できる最大次数の頂点，すなわち，命題4より，$A$ に含まれる頂点において次数が満たされていない最大次数の頂点となる。このとき修正アルゴリズムに従えば，$T^*_{max}$ の $k$ 番目の頂点 $\alpha$ が $u$ に接続することは，修正アルゴリズムによる頂点選択と辺接続の結果の1つと一致する。

次に，修正アルゴリズムによって生成される木は $T_{max}$（すなわち，$s$- 値が同じ）であることを示す。命題4により，各段階で修正アルゴリズムによって生成されるすべての木は，同じ $s$-値をもつ。$T^*_{max}$ は修正アルゴリズムによって生成されるので，最終的にアルゴリズムによって生成される木の $s$- 値はすべて等しい。

逆に，任意の $T_{max}$ は修正アルゴリズムによって生成されることを示す。そこで，$T_1 = T_{max}$ および $T_m = T^*_{max}$ として，$T_1$ から $T_m$ に命題2に従って変換されるとする。このとき，$k$ に関する帰納法を逆にたどって示す。$T_m$ は前述の結果から，修正アルゴリズムによって生成される。そこで，$T_k$ が修正アルゴリズムによって生成されると仮定し，頂点の位置づけを適用する。このとき，$T_{k-1}$ の部分木の交換を通して $T_k$ が得られる場合を考えればよい。命題2の証明と同じ記号を使うと，$T_{k-1}$ の部分木 $\tilde{T}_\alpha$ と $\tilde{T}_\beta$ を交換することで $T_k$ が得られるから，両者の違いは，$T_{k-1}$ では頂点 $\alpha$ と $u$ および $\beta$ と $v$ が接続し，一方，$T_k$ では $\alpha$ と $v$ および $\beta$ と $u$ が接続している点だけである。よってアルゴリズムで $T_k$ を生成するときに，$v \in A$ を選択して $\alpha \in B$ と接続し，$u \in A$ を選択して $\beta \in B$ と接続する過程があることになる。$d_u = d_v$ だから，アルゴリズムの手続きに従えば，$\alpha$ と $u$ および $\beta$ と $v$ が接続する過程もあるほずである。よって，$T_{k-1}$ も修正アルゴリズムによって生成されることになる。□

また，$T_{max}$ の多様性に関して次のような命題を導くことができる。

命題6

次数2以上の同じ次数が存在しない次数列に対して，木が存在するとき，$T_{max}$ はただ1つである。

証明

命題2の証明方法に従えば，任意の $T_{max}$ は部分木の交換をせずに，$T^*_{max}$ に変換できるので，$T_{max}$ そのものが $T^*_{max}$ である。□

この命題によれば，次数列における同じ次数（2以上）の頂点の存在が，$T_{max}$ の多様性をもたら

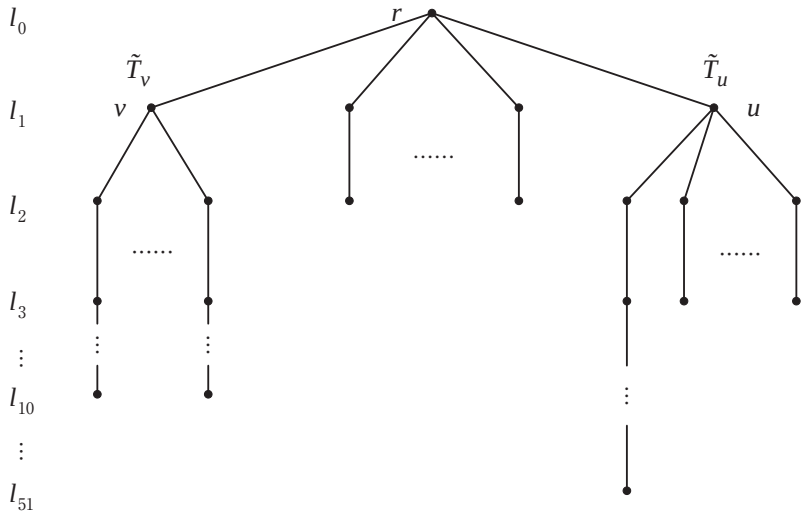


**図 4　Li の命題 4.2 を満たすが命題 4.4 を満たさない例**

すと言える。

## 5. 基準量の新たな提案

Li et al.（2005）はネットワーク評価のもう 1 つの基準量として，以下のような基準量を用いている。すなわち，グラフの頂点集合を $V=\{1, 2, \cdots, n\}$ としたとき，頂点 $v$ がグラフにおいて中心となる程度（例えば，ネットワークにおける交通量の要所）を定量的に表した中心性（betweenness centrality）と呼ばれる $Cb(v)$ である。この基準量はよく利用されており（Caldarelli 2007），次のように定義される。

$$Cb(v)=\frac{\sum_{s<t\in V}\sigma_{st}(v)}{\sum_{s<t\in V}\sigma_{st}}$$

ここで，$\sigma_{st}$ は頂点 $s$ と $t$ の間の最短道の個数，$\sigma_{st}(v)$ は頂点 $v$ を通る $s$ と $t$ の間の最短道の個数を表す。グラフが木の場合，任意の 2 つの頂点を結ぶ道は 1 つなので，$\sum_{s<t\in V}\sigma_{st}=n(n-1)/2$ であり，$\sigma_{st}(v)$ は 0 または 1 をとる。

ところが，Li et al.（2005）のアルゴリズムによる生成木がその命題 4.2 を満たしても，命題 4.4 を満たすとは限らない。図 4 に反例を示すと，この木の場合（$d_r=10$，$d_u=9$，$d_v=8$），$Cb(u)<Cb(v)$ となる。そこでまず，Li et al.（2005）の命題 4.4 を次のように修正する。

命題 7

与えられた次数列に対応する $T^*_{max}$ があるとする。このとき，$d_u>d_v$ であるような任意の頂点 $u$ と $v$ に対して，$Cb(u)>Cb(v)$ である。

証明

まず，頂点が位置づけられた $T^*_{max}$ 上で，$u$ が $v$ の上流にないとき，すなわち，$u$ は $v$ より上のレベル，または $u$ と $v$ は同レベルで $u$ は $v$ より左にある場合を考える。$u$ から $v$ に至る道において，$u$ に隣接する頂点を $s$，$v$ に隣接する頂点を $t$ とすると，これらは $T^*_{max}$ 上で，それぞれ $u$ と $v$ の上流にある。さらに $T^*_{max}$ 上で $u$ の下流の隣接点を左から $\alpha_1$，…，$\alpha_k$（$k=d_u-1$）とし，$v$ の下流の隣接点を左から $\beta_1, \cdots, \beta_l$（$l=d_v-1$）とする。そこで，$T^*_{max}$ から $u$ と $v$ を除いたとき $\alpha_1$，…，$\alpha_k$ のそれぞれを含む連結成分（部分木）の頂点数をそれぞれ $a_1$，…，$a_k$ とし，$\beta_1$，…，$\beta_l$ のそれぞれを含む連結成分の頂点数をそれぞれ $b_1$，

$\cdots, b_l$ とする。また，$s$ を含む連結成分（$t$ も含む）の頂点数を $c$ とする。このとき，$d_{\alpha_1} \geq \cdots \geq d_{\alpha_k} \geq d_{\beta_1} \geq \cdots \geq d_{\beta_l}$ である。よって，命題3の(b)から，$a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq b_1 \geq \cdots \geq b_l$ である（この場合，$T^*_{max}$ 上で各頂点の位置関係が決まっているので，次数の大小関係に等号があっても結論が成り立つ）。このことから，

$$\frac{n(n-1)}{2} Cb(u)$$
$$= \sum_{i<j\leq k} a_i a_j + (a_1 + \cdots + a_k)(b_1 + \cdots + b_l + c + 1)$$
$$\frac{n(n-1)}{2} Cb(v)$$
$$= \sum_{i<j\leq l} b_i b_j + (b_1 + \cdots + b_l)(a_1 + \cdots + a_k + c + 1)$$

よって，以下が成り立つ。

$$\frac{n(n-1)}{2}(Cb(u) - Cb(v))$$
$$= \sum_{i<j\leq k} a_i a_j - \sum_{i<j\leq l} b_i b_j + (c+1)\left(\sum_{i\leq k} a_i - \sum_{i\leq l} b_i\right) > 0$$

$u$ が $v$ の上流にある場合も，ほぼ同様にできる。

□

命題7から $T^*_{max}$ では，根 $r$ またはそれと同次数の頂点において，$Cb(v)$ が最大になることがわかる。一方，一般的な $T_{max}$ の場合，次の恒等式から評価できる。すなわち，根 $r$ に接続する木が $k$ 本あるとして，それぞれの木の頂点数を $x_i$（$1 \leq i \leq k$）とする。このとき，$\sum_i x_i = n-1$ だから，以下を得る。

$$\frac{n(n-1)}{2} Cb(r)$$
$$= \frac{k-1}{2k}\left((n-1)^2 - \frac{1}{k-1}\sum_{i<j\leq k}(x_i - x_j)^2\right)$$
$$\leq \frac{k-1}{2k}(n-1)^2 \qquad (1)$$

式(1)の導出：

定義より，$\frac{n(n-1)}{2} Cb(r) = \sum_{i<j\leq k} x_i x_j$ である。

ここで，

$$(n-1)^2 - \frac{2k}{k-1}\sum_{i<j\leq k} x_i x_j$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 - \frac{2k}{k-1}\sum_{i<j\leq k} x_i x_j$$
$$= \frac{1}{k-1}\sum_{i<j\leq k}(x_i - x_j)^2$$

となるから，この結果を定義に代入すればよい。

したがって，$Cb(v)$ を最大にするような頂点 $v$ は次数が大きく，その頂点に接続する各部分木の頂点数ができる限り等しくなるような点である。よって，必ずしも最大次数の頂点ではない。また，$T^*_{max}$ の $Cb(r)$ は，任意の $T_{max}$ のそれと比べて最大になるとは限らないので，$Cb(r)$ を基準量とするのはやや妥当性に欠ける。そこで，別の基準量を与えるために以下の命題を提案する。

命題8

(a) $T^*_{max}$ の根から葉までの距離の最大値は，任意の木のそれ以下である。

(b) $T^*_{max}$ の根からすべての頂点に至る距離の平均値は，任意の木のそれ以下である。

証明

(a) 頂点の位置づけに従う任意の木 $T$ に対して，$f_i$ をレベル $i$ の頂点の個数（$i \geq 1$）とし，$f_0 = 1$ とする。$n_i$ をレベル $i$ の左端の頂点の番号（$i \geq 1$）とし，$n_0 = 1$ とする。さらに，$d(j)$ を頂点番号 $j$ の次数（$j \geq 2$）とし，$d(1) = d(n_0) = f_1$ とする。このとき，

$$n_i = f_0 + f_1 + \cdots + f_{i-1} + n_0 = n_{i-1} + f_{i-1}$$

であり，また，

$$f_i = (d(n_{i-1}) - 1) + (d(n_{i-1} + 1) - 1) + \cdots + (d(n_i - 1) - 1)$$

である。よって，

$$n_1 = 2,\ \ n_i = 2 + d(1) + \sum_{j=2}^{n_{i-1}-1} (d(j) - 1)$$

（$i \geq 2$）となる。

ここで，$T^*_{max}$ の $n_i$ を $n^*_i$ とおき，$d(j)$ を $d^*(j)$ とおき，$f_i$ を $f^*_i$ とおく。$T$ は任意の固定した木である。そこで，$n^*_i \geq n_i$ を示す。ただし，$i$ の範囲は，$n^*_{i+1} = n+1$ を満たす最小の $i$ を $i_m$（すなわち，$T^*_{max}$ の 1 番下のレベル）としたとき，$0 \leq i \leq i_m$ である。$i$ が 0 および 1 のときは，明らかに成り立つ。$i \geq 2$ のとき，$n^*_{i-1} \geq n_{i-1}$ を仮定する。ここで，任意の $j$ $(1 \leq j \leq n)$ に対して，$d^*(1) + \cdots + d^*(j) \geq d(1) + \cdots + d(j)$ が成り立つ。$d^*(1) = d(1)$ だから，

$$\sum_{j=2}^{n^*_{i-1}-1} (d^*(j) - 1) \geq \sum_{j=2}^{n^*_{i-1}-1} (d(j) - 1)$$

$$\geq \sum_{j=2}^{n_{i-1}-1} (d(j) - 1)$$

となり，$n^*_i \geq n_i$ を得る。よって，$0 \leq i \leq i_m$ において，$n_i \leq n$ なので，$T$ の 1 番下のレベルはレベル $i_m$ 以下にあり，(a)が成り立つ。

(b)　$T^*_{max}$ において，$j$ 番目の頂点がレベル $i$ にあるとする。よって，$j \geq n^*_i$ である。$j$ と $i$ を固定し，ある木 $T$ に対して，$j$ 番目の頂点がレベル $i$ より上にあるとするならば，$j < n_i$ となる。(a)の議論によれば，$n^*_i \geq n_i$ であるから，この仮定は矛盾する。よって任意の $T$ では，$j$ 番目の頂点がレベル $i$ 以下となり，(b)が成り立つ。□

命題 7 の検討結果および命題 8 から $T_{max}$ を特徴づける基準量は，$Cb(v)$ よりも根から葉までの距離の最大値および根からすべての頂点に至る距離の平均値の方が適切であろう。したがって，$s$-値とこれらの基準量の組み合わせで $T_{max}$ をより正確に特徴づけられると考えられる。

一方，最小の $s$-値を持つ木 $T_{min}$ についても考えておくと，次のような概算からその特徴がある程度導かれる。木 $T_{min}$ の根から葉（端点）にいたる任意の道に対して，隣接する 4 つの頂点次数が単調増加すなわち $d_i < d_{i+1} < d_{i+2} < d_{i+3}$，あるいは単調減少すなわち $d_i > d_{i+1} > d_{i+2} > d_{i+3}$ することはない。このことから，$T_{min}$ においては，次数の高い頂点と次数の低い頂点が隣接する傾向が強いと予想される。

## 6. 課題

本稿では木を対象としたが，より一般的な，すなわち閉路を持つグラフに対する理論の拡張が必要である。

### 参考文献


Li, L., Anderson, D., Doyle, J. and Willinger, W. (2005). "Towards a Theory of Scale-Free Graphs: Definition, Properties and Implications", *Internet Math.* 2: 4, 431–523

Korte, B. and Vygen, J. (2005). *Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag

Caldarelli, G. ( 2007 ). *Scale-Free Networks: complex webs in nature and technology*, Oxford University Press